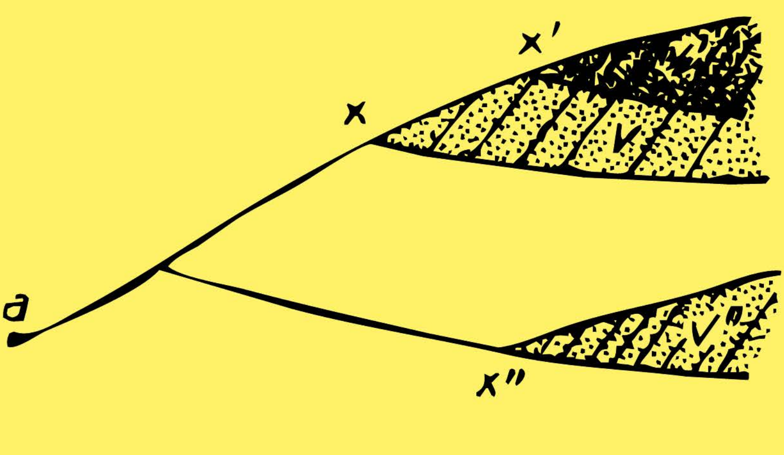
Jerzy Mioduszewski

WYKŁADY Z TOPOLOGII

Zbiory spójne i kontinua



Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego Katowice 2011

Wykłady z topologii
Zbiory spójne i kontinua

PRACE
NAUKOWE
UNIWERSYTETU
ŚLĄSKIEGO
W KATOWICACH

Nr 2867

Jerzy Mioduszewski

WYKŁADY Z TOPOLOGII

Zbiory spójne i kontinua

Wydanie drugie

Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego Katowice 2011

Recenzenci I wydania
Józef Krasinkiewicz
Hanna Patkowska

Spis treści

Wstęp

Spójność — własność polegająca na niemożliwości rozbicia przestrzeni na dwa zbiory otwarte — pojawiła się w rozważaniach półmatematycznych jeszcze u scholastyków z Merton College i Paryża, których, podobnie jak Galileusza, pochłaniał obecny w fizyce Arystotelesa problem ruchu pocisku. Dzieli się on na dwie fazy — wymuszoną, kiedy pocisk się wznosi, niemającą chwili ostatniej — i spadku naturalnego — fazy niemającej chwili początkowej. Sposób, w jaki łączą się obie fazy, jest problemem myślowym, który rozstrzygamy za Galileuszem, przyjmując, że łączy je dokładnie jedna chwila. To rozstrzygnięcie pojawia się w ścisłej formie u Dedekinda, twórcy obiektu myślowego arytmetyczno-mnogościowego znanego pod nazwą continuum, które okazuje się spójne w sensie wypowiedzianym na wstępie.

To proste pojęcie spójności przeniesione we wczesnych latach ubiegłego stulecia przez Frederica Riesza na powstały wówczas zakres obiektów mnogościowych, bardziej złożonych niż liniowo płynący czas, ujawniło dość szybko wiele osobliwości — wręcz patologii. Napotykał na nie na początku wieku A. Schoenflies, a za nim L.E.J. Brouwer, mimo że ograniczali się do zbiorów nazywanych później zwartymi. B. Knaster i K. Kuratowski (1922) napotkali wśród zbiorów spójnych (niezwartych) na osobliwości na tyle specyficzne, że omawia się je zazwyczaj oddzielnie od osobliwości pojawiających się w zakresie zbiorów zwartych spójnych nazwanych kontinuami.

Początkowo ograniczano zainteresowania do kontinuów położonych w przestrzeniach euklidesowych (H. Hahn, S. Mazurkiewicz, R.L. Moore), rozszerzając stopniowo zakres, najpierw do kontinuów położonych w przestrzeniach metrycznych. W pewnych zakresach, np. jeśli założyć lokalną spójność, dyscyplina ma charakter teorii. W pewnych dalszych zakresach jest to już raczej zbiór faktów. Od mniej więcej lat sześćdziesiątych ubiegłego wieku rozważania wyszły wyraźnie poza kontinua metryczne, nie wychodząc wszakże w istotnej mierze poza zakres T_2. Zbiory spójne niezwarte nadal pozostały w kręgu zainteresowań teorii. Chociaż współczesna teoria kontinuów wychodzi daleko poza zakres kontinuów położonych w przestrzeniach euklidesowych, to jednak już kontinua leżące na płaszczyźnie stwarzają nierozwiązane od dziesiątek lat zagadnienia.

Teoria zbiorów spójnych i kontinuów nie ma na celu zastosowań. Jej problemy to problemy wewnętrzne teorii. Ale od samego początku — wspomnieliśmy Galileusza — spójności i kontinuom towarzyszą zjawiska o znaczeniu fizycznym, które nadają teorii motywacji. Na obrzeżu teorii równań różniczkowych pojawiają się krzywe będące kontinuami zagęszczenia rozwiązań, wśród nich kontinua nierozkładalne — kontinua o skrajnych osobliwościach geometrycznych. Teoria kontinuów pomaga rozumieć te zjawiska przez badanie obiektów arytmetycznych o analogicznej budowie. Dyscyplina nazywana topologią dynamiczną — mająca związki z teorią kontinuów — dostarcza obiektów i procesów symulujących zjawiska przyrody, podobnie jak rozwijana obecnie teoria fraktali. Tych powiązań teorii kontinuów z dyscyplinami matematycznymi wyrosłymi na gruncie analizy Newtona nie można jednak w żadnym razie nazwać zastosowaniami, bo jest to raczej wspomagająca obie strony koegzystencja.

Jest kilka książek poświęconych spójności i kontinuom. W zakresie płaszczyzny należy wymienić przede wszystkim książkę B. Kerékjárty (1923). Kontinuom wymiaru 1, tj. krzywym, poświęcił książkę K. Menger. Oryginalnością wyróżnia się książka G.L. Spencera i D.W. Halla (1960). W książkach J.G. Hockinga i G.S. Younga (1961), K. Kuratowskiego (1950) i G.T. Whyburna (1942) kontinuom poświęcone są ich główne rozdziały. Logicznie przedstawiony przegląd wczesnych rezultatów dotyczących spójności i kontinuów można znaleźć u W. Wilkosza (1935).

W niniejszej publikacji autor po przedstawieniu podstawowych wątków, tworzących określone całości, starał się umieścić również rzeczy nowsze. Stosowana w tej książce symbolika i nazewnictwo nie odbiega od ogólnie przyjętych.

Książka nie ujmuje całości zagadnienia. Urywa się w miejscu, w którym wyczerpują się możliwości elementarnych środków w niej stosowanych. Niewiele mówi się o odwzorowaniach kontinuów, nie pojawia się metoda granic wstecznych.

Katowice, sierpień 1995, J.M.

Autor dziękuje Profesorowi Piotrowi Wojtylakowi, kierującemu w latach dziewięćdziesiątych pracą Instytutu Matematyki UŚ, za przychylność zamiarowi wydania niniejszej pozycji. Pani Aleksandrze Kaptur autor dziękuje za przygotowanie rękopisu. Słuchacze Studium Doktoranckiego Instytutu Matematyki UŚ pomogli autorowi w wyłowieniu licznych usterek w pierwszych wersjach książki. W opracowaniu kilku rozdziałów istotną pomocą były rozmowy z Doktorem Wojciechem Dębskim, obecnie w Saskatoon w Kanadzie, oraz z Doktorem Sławomirem Turkiem z Uniwersytetu Humanistycznego w Kielcach i Doktorem Jerzym Krzempkiem z Politechniki Gliwickiej.

Katowice, grudzień 2009, J.M.

Autor dziękuje Wydawnictwu Uniwersytetu Śląskiego za trud wznowienia książki. Dziękuję Pani Redaktor Mgr Barbarze Todos-Burny za dopilnowanie stylu i poprawności, a Panu Mgr Tomaszowi Gutowi za współpracę nad tekstem i rysunkami.

Katowice, styczeń—luty 2011, J.M.

Literatura — książki

Aleksandrow P.S., 1948: *Wwiedienije w tieoriju mnożestw i funkcij*. Moskwa—Leningrad.

Aleksandrow P.S., 1977: *Wwiedienije w tieoriju mnożestw i obszczuju topołogiju*. Moskwa.

Charatonik J.J., 1998: *History of Continua Theory*. W: *Handbook of the History of General Topology*. Kluwer, s. 703—786.

Engelking R., 1989: *Topologia ogólna*. Cz. 1—2. Warszawa.

Hall D.W., Spencer G.I., 1960: *Elementary Topology*. New York—London.

Hausdorff F., 1914: *Grundzüge der Mengenlehre.* Leipzig.

Hocking J.G., Young G.S., 1961: *Topology.* Reading Mass.

Kelley J.L., 1957: *General Topology*. Toronto—New York—London.

Kerékjártó B. von, 1923: *Vorlesungen über Topologie.* Springer.

Kuratowski C., 1950: *Topologie*. Cz. 2. Warszawa—Wrocław.

Menger K., 1932: *Kurventheorie*. Leipzig.

Rimow W., 1975: *Topologie*. Berlin.

Sierpiński W., 1952: *General Topology*. Toronto.

Whyburn G.T., 1972: *Analytic Topology*. Vol. 28. AMS Colloquium Publications 1972.

Wilkosz W., 1931: *Les propriétés du plan Euclidien*. Memorial de Sciences Mathématiques. Gauthier—Villars, Paris.

Wykład I. Zbiory uporządkowane

∗ Uporządkowania zbioru ∗ Skoki i luki ∗ Uporządkowania ciągłe ∗ Kresy górne i dolne ∗ Przedziały zbioru uporządkowanego ∗ Zbiory wypukłe ∗ Podzbiory porządkowo gęste — ośrodkowość porządkowa ∗ Twierdzenia Cantora ∗ Charakteryzacja porządkowa zbioru liczb rzeczywistych

Obiektem matematycznym motywującym pojęcie spójności była zbudowana przez Dedekinda prosta rzeczywista. Podstawową strukturą prostej rzeczywistej jest jej uporządkowanie. Własność tego uporządkowania nazywana ciągłością okazuje się w zakresie zbiorów mających uporządkowanie synonimem później wprowadzonego pojęcia spójności. Jakkolwiek pojęcie to zyskało z czasem znaczenie w szerokim zakresie przestrzeni topologicznych, to jednak zakres przestrzeni topologicznych uporządkowanych pozostaje nadal zakresem motywującym zasadnicze pojęcia dotyczące spójności.

Uporządkowania zbioru

Przez *uporządkowanie* zbioru rozumie się relację $\leqslant$ wiążącą elementy tego zbioru, która jest

(1) *zwrotna*, tj. taka, że jest zawsze $x \leqslant x$,

(2) *antysymetryczna*, tj. taka, że $x \leqslant y$ i $y \leqslant x$ pociąga $x = y$,

(3) *przechodnia*, tj. taka, że $x \leqslant y$ i $y \leqslant z$ pociąga $x \leqslant z$, i

(4) *liniowa*, tj. taka, że jest zawsze bądź $x \leqslant y$, bądź $y \leqslant x$, dla wszelkich x i y.

Zbiór z daną na nim relacją uporządkowania będzie nazywany *zbiorem uporządkowanym*.

Jeśli $x \leqslant y$ i $x \neq y$, to pisze się $x < y$ i czyta się x *mniejsze niż* y (lub x *wcześniejsze niż* y, lub x *poprzedza* y). Będziemy nazywać relację $<$ nierównością *ostrą*, a nierówność $x \leqslant y$, nazywana *słabą*, może być rozumiana jako x *mniejsze niż* y *lub równe* y.

Przykłady uporządkowań, które będziemy mieć stale na uwadze, to znane uporządkowania — określone arytmetycznie — zbiorów liczb naturalnych, całkowitych, wymiernych i rzeczywistych.

Jeśli relacja $\leqslant$ nie ma własności (4), to nazywa się ją uporządkowaniem *częściowym*; tego rodzaju relacją jest zawieranie się zbiorów.

Wprowadzona wyżej relacja $<$ ma następujące, nietrudne do sprawdzenia, własności:

(1’) możliwości $x < y$, $y < x$ i $y = x$ nawzajem się wykluczają,

(2’) $x < y < z \Rightarrow x < z$ (*przechodniość*),

(3’) $x < y$ lub $x = y$, lub $y < x$ (*liniowość*).

Na odwrót, określając

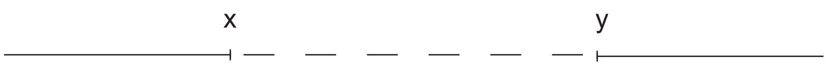
(5) $x \leqslant y$ jako $x < y$ lub $x = y$,

łatwo sprawdza się — zakładając (1’) — (3’) — warunki (1)—(4) przyjęte dla nierówności słabej.

Pojęcie uporządkowania mogłoby być zatem oparte na relacji ostrej nierówności $<$ zamiast na nierówności słabej $\leqslant$, której spełnianie dla pary punktów sprowadza się do alternatywy (5).

Skoki i luki

Przez *skok* uporządkowania rozumie się parę punktów taką, że nie ma między nimi innych punktów zbioru.



Rys. 1. Skok

Przez *rozbicie* zbioru rozumiemy przedstawienie zbioru w postaci sumy podzbiorów rozłącznych niepustych. Rozbicie zbioru na dwa zbiory A i B takie, że każdy element zbioru A poprzedza każdy element zbioru B, nazywane jest *przekrojem*[1]. Jeśli w zbiorze A nie ma elementu największego, a w zbiorze B nie ma elementu najmniejszego, to mówimy, że przekrój wyznacza *lukę*.

Przykładem luki jest rozbicie zbioru liczb wymiernych dodatnich na zbiory $\{w : w^2 < 2\}$ i $\{w : w^2 > 2\}$[2].

Rys. 2. Luka

Uporządkowania ciągłe

Uporządkowanie zbioru nazywane jest uporządkowaniem *ciągłym*, jeśli nie ma w nim *skoków* i *luk*.

---

[1] Przekrojem w sensie Dedekinda.

[2] Pełny arytmetyczny dowód, że rozbicie to daje lukę, można znaleźć np. w książce *Działania nieskończone* W. Sierpińskiego (Warszawa 1948, s. 2).

Jeśli więc zbiór uporządkowany w sposób ciągły rozbić na dwa zbiory A i B takie, że każdy element zbioru A jest mniejszy od każdego elementu zbioru B — tj. utworzyć przekrój — to bądź w zbiorze A będzie element największy, bądź w zbiorze B będzie element najmniejszy i te przypadki się wykluczają.

Przykładem uporządkowania ciągłego jest uporządkowanie zbioru liczb rzeczywistych. Uporządkowanie liczb wymiernych ma luki, nie mając skoków. Uporządkowanie liczb całkowitych ma skoki, nie mając luk.

Kresy górne i dolne

Do pojęcia ciągłości uporządkowania można dojść, wychodząc z innego rodzaju wyobrażeń.

Niech X będzie zbiorem uporządkowanym relacją $\leqslant$. Przez *kres górny* podzbioru A zbioru X rozumiemy najmniejszy spośród tych elementów x zbioru X, które ograniczają z góry zbiór A, tj. tych elementów x, dla których $a \leqslant x$ dla wszystkich a ze zbioru A.

Jeśli elementem ograniczającym zbiór A jest element zbioru A, to, oczywiście, ten element jest kresem górnym zbioru A; jest to wtedy *największy* element zbioru A.

Nie każdy podzbiór musi mieć[3] kres górny, a jeśli ma, to ten kres górny nie musi należeć do tego podzbioru. W zbiorze liczb rzeczywistych zbiór liczb całkowitych nie ma kresu górnego, bo nie ma liczb, które by ten zbiór ograniczały; zbiór liczb rzeczywistych ujemnych jest ograniczony przez każdą z liczb nieujemnych i żadna liczba ujemna nie jest takim ograniczeniem; kresem górnym tego zbioru jest liczba 0, która doń nie należy.

Twierdzenie. *Jeśli uporządkowanie zbioru nie ma luk, to każdy jego podzbiór ograniczony z góry i niepusty*[4] *ma w nim kres górny.*

Dowód. Niech A będzie podzbiorem niepustym zbioru X, ograniczonym z góry. Jeśli wśród elementów ograniczających z góry zbiór A jest element zbioru A, to, na mocy poczynionej wcześniej uwagi, jest on kresem górnym zbioru A. Wykluczmy więc ten przypadek i rozważmy wraz z każdym elementem a zbioru A zbiór $X_a = \{x \in X : x \leqslant a\}$. Zsumujmy wszystkie zbiory X_a; otrzymany w ten sposób zbiór X_A jest niepusty (bo A jest niepuste) i wraz ze swoim dopełnieniem (również niepustym) tworzy przekrój. W rozważanym przez nas przypadku zbiór X_A nie ma elementu największego, a wobec nieistnienia luk w uporządkowaniu zbioru X w dopełnieniu zbioru X_A istnieje element najmniejszy. Jest to kres górny zbioru A.

Wynikanie odwrotne jest oczywiste: luka znaczy istnienie zbioru ograniczonego z góry niemającego kresu górnego. Stąd *uporządkowanie zbioru nie ma*

---

[3] Powiedzenie, że zbiór ma kres górny, jest zaszłością językową, która kłóci się z potocznym znaczeniem słowa *ma* w sytuacji, kiedy ten kres do zbioru nie należy.

[4] Kresem górnym podzbioru pustego jest — zgodnie z przyjętym określeniem kresu górnego — najmniejszy element zbioru. Jest to fakt będący następstwem przyjętego przez nas formalizmu logicznego. Nie jest to jedyna niespodzianka, jaką sprawia zbiór pusty; por. na ten temat artykuł A. Wiwegera: *Kłopoty ze zbiorem pustym*. „Wiadomości Matematyczne" 11 (1970), 187—199. Dlatego nie możemy żądać w tezie twierdzenia, aby również podzbiór pusty miał swój kres górny, to bowiem wymagałoby założenia, by rozważany zbiór miał element najmniejszy.

luk wtedy i tylko wtedy, gdy każdy podzbiór ograniczony z góry i niepusty ma w tym zbiorze kres górny.

Analogicznie określa się *kresy dolne* podzbiorów, biorąc pod uwagę uporządkowanie przeciwne[5]. Ponieważ pojęcie luki nie wyróżnia kierunku uporządkowania, dowiedziona równoważność pozostaje w mocy, jeśli zastąpić w niej kres górny kresem dolnym.

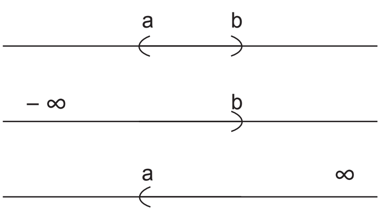
Przedziały zbioru uporządkowanego

Wśród podzbiorów zbioru uporządkowanego wyróżnimy *przedziały*, tj. zbiory postaci $\{x : a < x < b\}$, złożone z punktów x leżących między dwoma punktami nazywanymi końcami przedziału. Końce nie wchodzą w skład przedziału. Przedział o końcach a i b, $a < b$, będzie oznaczany symbolem (a, b).

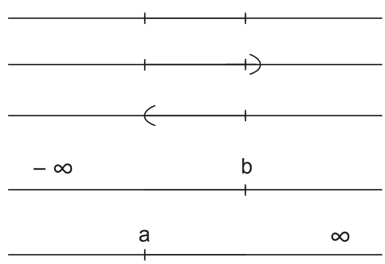
Wyróżnimy *przedziały początkowe* $(-\infty, a)$, tj. zbiory postaci $\{x : x < a\}$, oraz analogicznie rozumiane *przedziały końcowe* (b, ∞), tj. zbiory postaci $\{x : x > b\}$[6].

Wystarczy mieć przedziały początkowe i końcowe, aby — jako przekroje — dostać wszelkie inne.

Warto zwrócić uwagę na to, że przedziały mogą być puste; jest tak, jeśli końce przedziału tworzą skok (por. rys. 1). Jeśli uporządkowanie ma skoki, to przedziały mogą mieć postać geometryczną odbiegającą od wyobrażeń o przedziałach na prostej — por. rys. 3, 4 i 5 przedstawiają przedziały tak, jak wyglądają one na prostej i — ogólnie — w uporządkowaniach ciągłych).



Rys. 3. Przedział, przedziały początkowe i końcowe



Rys. 4. Odcinki i półodcinki

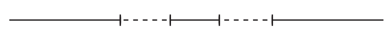
Zbiory złożone z punktów x takich, że $a \leqslant x \leqslant b$, oznaczane symbolami $[a, b]$, będą nazywane *odcinkami*. Warunek postaci $a \leqslant x < b$ określa zbiór nazywany *półodcinkiem z lewym końcem*, oznaczany dalej symbolem $[a, b)$; analogicznie rozumiany jest *półodcinek z prawym końcem*, dla którego symbolem jest $(a, b]$. Warunek $x \leqslant a$ określa *odcinek początkowy* o końcu a, a warunek $x \geqslant b$ —

[5] Formalnie jest to relacja $\leqslant'$ taka, że $x \leqslant {}'y \Leftrightarrow y \leqslant x$; tego formalnego ujęcia wobec oczywistości opisywanej sytuacji nie będziemy się trzymali.

[6] Symbole $-\infty$ i ∞ nie oznaczają elementów zbiorów, lecz są ogólnie przyjętymi znakami umownymi.

odcinek końcowy o początku b. Zwróćmy uwagę, że jeśli $a < b$ jest skokiem, to odcinek $[a, b]$ redukuje się do zbioru dwuelementowego $\{a, b\}$.

Proste pojęciowo zbiory, jakimi są przedziały, odcinki i półodcinki, wymagają dużej uwagi w posługiwaniu się nimi w sytuacji, gdy uporządkowanie ma skoki, a także, kiedy ma luki.



Rys. 5. Dwa sąsiednie skoki wyznaczają przedział, który może być — jako zbiór — odcinkiem

Zbiory wypukłe

Podzbiór zbioru uporządkowanego nazywamy *wypukłym*, jeśli wraz z każdymi dwoma punktami zawiera wszystkie punkty leżące między nimi, a więc jeśli wraz z punktami a i b zawiera odcinek $[a, b]$ tego uporządkowania.

Wszystkie rodzaje przedziałów, odcinków i półodcinków są podzbiorami wypukłymi.

Zbiory wypukłe stanowią szerszy zakres zbiorów niż wymienione dotąd rozmaite rodzaje odcinków, bo np. podzbiór $\{w : w^2 < 2\}$ zbioru liczb wymiernych dodatnich nie jest ani przedziałem, ani odcinkiem, ani półodcinkiem tego zbioru, będąc jego podzbiorem wypukłym. Ale:

Twierdzenie. *Jeśli uporządkowanie zbioru nie ma luk, to podzbiór wypukły tego zbioru, jeśli nie jest zbiorem pustym lub całością, jest odcinkiem, odcinkiem początkowym lub końcowym, przedziałem, przedziałem początkowym lub końcowym, lub jednym z półodcinków.*

Dowód. Niech W będzie podzbiorem wypukłym zbioru X uporządkowanego bez luk. Pokażemy najpierw, że przedział (a, b), gdzie a jest kresem dolnym, a b — kresem górnym zbioru W (dopuszczając $a = -\infty$ i $b = \infty$, jeśli zbiór W nie jest ograniczony z dołu bądź z góry), jest zawarty w zbiorze W (istnienie wspomnianych kresów wynika z nieistnienia luk).

Dla dowodu zapowiedzianego zawierania weźmy x, $a < x < b$. Z własności kresów wynika istnienie w zbiorze W punktów a' i b' takich, że $a \leqslant a' < x < b' \leqslant b$. Wobec wypukłości odcinek $[a',b']$ jest zawarty w W. Stąd $x \in W$.

Jeśli kresy nie należą do W, to $W = (a, b)$. Jeśli któryś z kresów należy do W, to $W = [a, b]$, $W = [a, b)$ lub $W = (a, b]$ (dopuszczamy $a = -\infty$ i $b = \infty$ w przypadku nieistnienia ograniczenia z dołu bądź z góry; jeśli nie ma żadnego z tych ograniczeń, to $W = X$).

Niech A będzie podzbiorem zbioru uporządkowanego X. *Składowymi wypukłości* zbioru A w zbiorze X nazywamy maksymalne podzbiory wypukłe zbioru X zawarte w A. Składowe wypukłości zbioru są równe, jeśli mają punkt wspólny. Składowe wypukłości zbioru A stanowią więc rozbicie zbioru A na maksymalne podzbiory wypukłe zbioru X zawarte w A.

Podzbiory porządkowo gęste — ośrodkowość porządkowa

Niech X będzie zbiorem uporządkowanym. Podzbiór A zbioru X nazywany jest *porządkowo gęstym* — w skrócie, dla celów tego Wykładu, *gęstym* w zbiorze X, jeśli w każdym przedziale niepustym zbioru X są punkty zbioru A.

Zbiór liczb rzeczywistych zawiera zbiór gęsty przeliczalny, mianowicie podzbiór liczb wymiernych. Mówi się też, że zbiór liczb wymiernych stanowi *ośrodek przeliczalny* zbioru liczb rzeczywistych. Zbiory uporządkowane, zawierające zbiory gęste przeliczalne, nazywane są *porządkowo ośrodkowymi*.

Twierdzenia Cantora

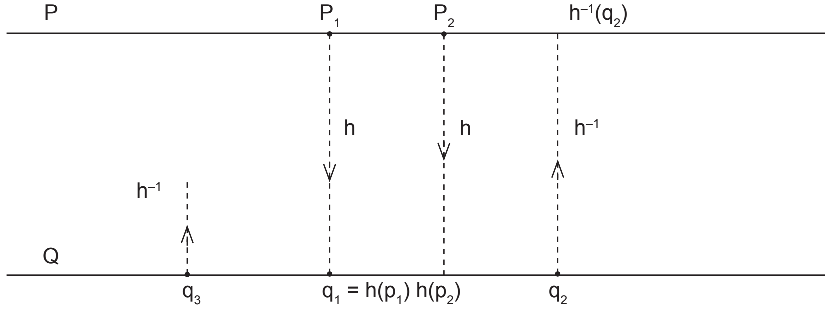
Przez *izomorfizm* zbiorów uporządkowanych rozumiemy odwzorowanie jednego zbioru na drugi, zachowujące nierówności, tj. takie odwzorowanie f, dla którego $x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')$ dla wszelkich x i x'. Oczywiście, jest to odwzorowanie odwracalne i odwrotne doń jest też izomorfizmem. Jeśli między uporządkowaniami istnieje izomorfizm, to nazywamy je *izomorficznymi*.

Twierdzenie Cantora[7]. *Każde dwa uporządkowania zbiorów przeliczalnych, niemające skoków, są izomorficzne, jeśli pominąć w nich elementy skrajne.*

Dowód. Niech $P = \{p_1, p_2,...\}$ i $Q = \{q_1,q_2,...\}$ będą zbiorami przeliczalnymi, danymi już w postaci ciągów, uporządkowanymi bez skoków i niemającymi elementów skrajnych. Nie powinno prowadzić do nieporozumień to, że nierówności w zbiorach P i Q będą oznaczane tym samym symbolem $<$ (nierówności $<$ nie mają nic wspólnego z kolejnością w zapisaniu zbiorów P i Q jako ciągów).

Izomorfizm $h : P \to Q$ będzie określony, jednocześnie z odwrotnym doń izomorfizmem $h^{-1} : Q \to P$, indukcyjnie.

Przyjmujemy $h(p_1) = q_1$ i określamy $h^{-1}(q_2)$ jako element zbioru P o najmniejszym wskaźniku j wśród takich p_j, które są w tej samej relacji $<$ do p_1 co q_2 do q_1.



Rys. 6. Twierdzenie Cantora

[7] Twierdzenie pochodzi z prac G. Cantora: *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*. „Mathematische Annalen” 76 (1895), 781—512; 79 (1897), 207—206; jest w *Gesammelte Abhandlungen* Cantora, Springer 1980, s. 303. Szerszy kontekst i komentarze por. W. Sierpiński: *Cardinaland ordinal numbers*. Warszawa 1958, s. 209—214.

W ten sposób podzbiór dwuelementowy $\{p_1, h^{-1}(q_2)\}$ zbioru P odwzorowany jest przez określone na nim odwzorowanie h izomorficznie na podzbiór dwuelementowy $\{q_1, q_2\}$ zbioru Q (por. rys. 6).

Dalej postępujemy przez indukcję. Przyjmijmy, że określiliśmy izomorfizm h podzbioru skończonego P' zbioru P na podzbiór skończony Q' zbioru Q, który jest przedłużeniem określonego wcześniej izomorfizmu zbiorów dwuelementowych.

Zależnie od parzystości ilości elementów w zbiorach P' i Q' zbudowane już przyporządkowania będą przedłużane bądź w kierunku od P do Q, bądź od Q do P.

Jeśli ilość elementów w zbiorach P' i Q' jest liczbą nieparzystą, to niech j_* będzie najmniejszym wskaźnikiem spośród tych j, dla których p_j nie należą do P'. Określamy $h(p_{j^*})$ jako ten element zbioru Q, który jest w tych samych relacjach nierówności $<$ do elementów zbioru Q' co element p_{j^*} do odpowiadających im w izomorfizmie $h^{-1} : Q' \to P'$ elementów zbioru P', i który ma wśród nich najmniejszy wskaźnik.

Jeśli ilość elementów w zbiorach P' i Q' jest liczbą parzystą, to niech j_* będzie najmniejszym wskaźnikiem spośród tych j, dla których q_j nie należą do Q'. Określamy $h^{-1}(q_{j^*})$ jako ten element zbioru P, który jest w tych samych relacjach mniejszości $<$ do elementów zbioru P' co element q_{j^*} do odpowiadających im w izomorfizmie $h : P' \to Q'$ elementów zbioru Q', i który ma wśród nich najmniejszy wskaźnik.

W obu przypadkach poszerzamy dziedzinę określonego wcześniej izomorfizmu o kolejne niewykorzystane dotąd elementy zbioru P i Q. Konstrukcja indukcyjna jest więc zakończona.

Charakteryzacja porządkowa zbioru liczb rzeczywistych

Twierdzenie (Cantor). *Zbiory uporządkowane w sposób ciągły, ośrodkowe, są izomorficzne, jeśli pominąć w nich elementy skrajne.*

Dowód. Niech X i Y będą zbiorami uporządkowanymi w sposób ciągły, bez elementów skrajnych, i niech $P \subset X$ i $Q \subset Y$ będą ich ośrodkami przeliczalnymi. Na mocy poprzedniego twierdzenia istnieje izomorfizm $h : P \to Q$, który przedłuża się w następujący sposób do izomorfizmu $h_* : X \to Y$.

Niech x będzie elementem zbioru X, przyjmijmy, że spoza P. Podział zbioru P na zbiory $A = \{p : p < x\}$ i $B = \{p : x < p\}$ jest przekrojem zbioru P dającym lukę. Zbiory $h(A)$ i $h(B)$ stanowią przekrój zbioru Q. Przekrój ten daje lukę. Z ciągłości uporządkowania zbioru Y wynika istnienie w Y kresu górnego dla zbioru $h(A)$ i kresu dolnego dla zbioru $h(B)$. Wobec gęstości tego uporządkowania te kresy są równe.

Określamy $h_*(x)$ jako wspólną wartość obu kresów.

Dla elementów x zbioru P przyjmijmy $h_*(x) = h(x)$. Nie przedstawia trudności dowód, że h_* jest izomorfizmem X na Y.

Jednym ze zbiorów uporządkowanych w sposób ciągły i ośrodkowy jest zbiór liczb rzeczywistych, nazywamy dalej również *prostą rzeczywistą*. Z dowiedzionego twierdzenia wynika, że *każdy zbiór uporządkowany w sposób ciągły, ośrodkowy i niemający elementów skrajnych jest izomorficzny ze zbiorem liczb rzeczywistych.*

Wprowadzenie do matematyki prostej rzeczywistej było punktem zwrotnym w jej rozwoju. Mimo motywacji geometrycznych, jest to twór czysto arytmetyczny, urzeczywistniający istniejącą od Starożytności ideę *continuum*. Prowadzącą do tego konstrukcję myślową najprościej ujął Dedekind (1858—1872). Mając zbiór liczb wymiernych, tj. ułamków liczb całkowitych, którego uporządkowanie nie ma skoków, ale ma luki, Dedekind dołączył luki, tłumacząc je jako symbole par zbiorów tworzących przekroje w zbiorze ułamków. Dostawał rozszerzenie zbioru ułamków do zbioru mającego już uporządkowanie ciągłe. Zbiór ten — continuum arytmetyczne — uznane zostało przez Dedekinda — umową pozamatematyczną — za prostą geometryczną[8].

Niezależnie, wychodząc z innych wyobrażeń H.C. Méray (1868), G. Cantor (1872), K. Weierstrass (wykłady) i inni podali własne konstrukcje[9]. G. Cantor dowiódł — dowód podaliśmy — że z dokładnością do izomorfizmu istnieje jedno rozszerzenie zbioru liczb wymiernych do zbioru uporządkowanego w sposób ciągły i zawierające zbiór liczb wymiernych jako podzbiór porządkowo gęsty.

---

[8] R. Dedekind: *Stetigkeit und irrationale Zahlen*. Braunschweig 1872; rok 1858 podaje Dedekind we wstępie do wspomnianej książki, która była tłumaczona na polski przez S. Straszewicza jako *Ciągłość a liczby niewymierne*. Biblioteka „Wektora", 1914; opis konstrukcji można znaleźć w pracy W. Sierpińskiego: *Działania nieskończone*. „Monografie Matematyczne" 13, (1948), s. 3.

[9] O innych konstrukcjach continuum arytmetycznego por. podręczniki *arytmetyki teoretycznej*. Na temat historii odkryć por. J.H. Manheim: *The genesis of the point set topology*. Oxford 1964. B. Bolzano wcześniej niż inni wspomniani autorzy miał własną teorię, ale opublikowaną dopiero nam współcześnie (1962). Konstrukcja Bolzany budzi wszakże dotąd dyskusje — K. Rychlik: *Theorie der reellen Zahlen in Bolzanos handschriftlichen Nachlasse*. Praga 1962; por. J. Mioduszewski: *Analiza nowożytna: drogi ku ścisłości. Matematyka XIX wieku, II Ogólnopolska Szkoła Historii Matematyki*. Szczecin 1988.

Wykład II. Topologie wyznaczone przez uporządkowanie

Topologie uporządkowań ∗ Spójność ∗ Topologia podzbioru ∗ Uporządkowania leksykograficzne ∗ Stopień ośrodkowości, waga, liczba Suslina ∗ Nieporządkowalność prostej Sorgenfreya ∗ O problemie Suslina ∗ Zwartość ∗ Zwartość ciągowa ∗ Zbiór Cantora ∗ Kontinua uporządkowane

Topologie uporządkowań

Uporządkowanie zbioru wyznacza na nim w sposób naturalny *topologię*[10], w której za zbiory *otwarte* uznaje się wszelkie przedziały początkowe i końcowe, a więc zbiory postaci $\{x : x < a\}$ i $\{x : a < x\}$, a w rezultacie wszelkie przedziały, tj. zbiory postaci $\{x : a < x < b\}$, które wraz z poprzednimi — tworząc rodzinę zbiorów zamkniętą ze względu na przekroje skończone — stanowią *bazę* tej topologii, tj. taki zasób zbiorów otwartych, z których przez sumowanie dostaje się wszelkie zbiory otwarte, tj. całą topologię rozważanego uporządkowania.

Oczywiście, *topologia wyznaczona przez uporządkowanie spełnia warunek* T_2, co znaczy, że dla każdych dwu punktów a i b znajdziemy zawsze zbiory otwarte rozłączne U i V takie, że $a \in A$ i $b \in B$ (można je zawsze znaleźć w postaci przedziałów wokół tych punktów)[11]. Można wszakże powiedzieć więcej, a mianowicie, że

Topologie uporządkowań są normalne[12].

D o w ó d. Niech X będzie zbiorem z topologią uporządkowania. Niech A i B będą podzbiorami domkniętymi rozłącznymi przestrzeni X. Rozważmy dopełnienie $D = X - \{A \cup B\}$ ich sumy. Jest nim zbiór otwarty w X; niech U będą składowymi zbioru D.

Są dwa przypadki

1. Końce składowej U należą do tego samego zbioru, A lub B. Dołączamy składową U do tego zbioru. Dostajemy większe zbiory domknięte, nadal rozłączne.

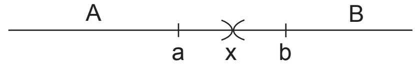
[10] Pojęcia topologii ogólnej uznajemy za znane, np. z podanych na wstępie książek P.S. A l e k s a n d r o w a, R. E n g e l k i n g a i J.L. K e l l e y a. Jeśli mimo to będą przypominane, to dlatego, by uniknąć ewentualnych nieporozumień związanych z rozmaitością ujęć.

[11] Zauważmy wszakże, że warunek T_2, w przypadku topologii uporządkowań, wynika już z warunku T_1 zapewniającego domkniętość zbiorów jednopunktowych.

[12] Znaczy to, że ich podzbiory domknięte rozłączne dają się oddzielić otoczeniami otwartymi. Twierdzenie przypisywane G. B i r k h o f f o w i, *Lattice Theory*, 1940; por. R. E n g e l k i n g: *Topologia ogólna*. Warszawa 1988, s. 75.

2. Końce a i b składowej U należą do różnych od siebie zbiorów a i B. Niech więc np. a należy do A i b należy do B. Weźmy w U dowolne x. Dołączmy przedział od a do x do zbioru A, a przedział od x do b do zbioru B. Nie czynimy nic, jeśli takiego punktu x nie ma.

Tak powiększone zbiory A i B są zbiorami otwartymi, rozłącznymi, z których jeden zawiera A, a drugi B.



Rys. 7. Otoczenie rozłączne zbioru A i B

Spójność

Twierdzenie. *Zbioru uporządkowanego w sposób ciągły nie można rozbić na dwa zbiory otwarte*[13].

Dowód. Niech relacja $\leqslant$ porządkuje zbiór X w sposób ciągły. Przypuśćmy, że mamy rozbicie $X = U \cup V$ zbioru X na dwa zbiory otwarte (niepuste) topologii wyznaczonej przez $\leqslant$.

Niech p będzie punktem zbioru U. Istnieją przedziały wokół p zawarte w U. Ich suma P jest nadal przedziałem, przedziałem końcowym lub początkowym, lub całością zbioru. W tym ostatnim przypadku dowód jest zakończony, bo znaczyłoby to, że zbiór V jest pusty.

Niech zatem a będzie końcem przedziału P, dla ustalenia uwagi — prawym.

Jeśli $a \in U$, to istnieje przedział W wokół a zawarty w U; ponieważ a nie jest punktem skoku (uporządkowanie nie ma skoków), w przedziale W są punkty na prawo od a; stąd zbiór $P \cup W$ byłby przedziałem większym niż P; sprzeczność, wobec maksymalności P.

Jeśli $a \in V$, to pewien przedział W wokół a jest zawarty w V. Ponieważ a nie jest punktem skoku, to na lewo od a, ale na prawo od p są punkty przedziału W, a więc zbioru V; sprzeczność, bo punkty między p i a należą do U, a zbiory U i V są, na mocy założenia, rozłączne.

Dowiedliśmy w ten sposób, że topologia uporządkowania ciągłego jest *spójna*, w szczególności *prosta rzeczywista jest spójna*.

Jest i na odwrót: *spójność topologii implikuje ciągłość uporządkowania*.

Istotnie, jeśli uporządkowanie nie byłoby ciągłe, to miałoby skok lub lukę, co oznaczałoby w każdym z tych przypadków istnienie przekroju dającego rozbicie zbioru na dwa przedziały otwarte (w przypadku luki żaden ze zbiorów nie ma punktów skrajnych; w przypadku skoku punkty skrajne są w obu zbiorach). Stąd niespójność, wbrew założeniu.

[13] Rozbicie — znaczy rozbicie na zbiory niepuste.

Topologia podzbioru

Jeśli $\mathcal{T}$ jest topologią na X i $A \subset X$, to przez T_A rozumiemy topologię na A, której zbiorami otwartymi są przekroje $U \cap A$ zbioru A ze zbiorami otwartymi U w sensie topologii T. Jest to topologia *dziedziczona na A* (z topologii na zbiorze X). Zbiór A z topologią $\mathcal{T}_A$ nazywany jest *podprzestrzenią* przestrzeni X z topologią $\mathcal{T}$.

Jeśli $\mathcal{T}$ jest topologią porządkową na X i $A \subset X$, to przez $\mathcal{T}_{porzA}$ rozumiemy topologię na A wyznaczoną przez *uporządkowanie* zbioru *A dziedziczone z X*.

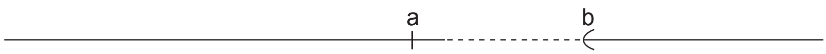
Jest zawsze

$$\mathcal{T}_{porzA} \subset \mathcal{T}_A, \tag{6}$$

bo przedziały zbioru A (stanowiące bazę topologii $\mathcal{T}_{porzA}$) są przekrojami ze zbiorem A przedziałów (o tych samych końcach) w zbiorze X, a więc należą do $\mathcal{T}_A$.

Inkluzja przeciwna jest na ogół fałszywa.

Weźmy bowiem zbiór X z uporządkowaniem mającym dokładnie jeden skok, $a < b$, które nie ma luk i elementu ostatniego. Usuńmy punkt b. Uporządkowanie tak powstałego zbioru A dziedziczone z X jest ciągłe (!). Zatem topologia $\mathcal{T}_{porzA}$ jest spójna. Tymczasem topologia $\mathcal{T}_A$ nie jest spójna: zbiór $\{x : x < b\}$ jest otwarty w sensie tej topologii, nie jest otwarty w sensie typologii T_A.



Rys. 8. Pozorny skok uporządkowania dziedziczonego

Widzimy więc, że równości w (6) nie można uzyskać nawet w zakresie bardzo prostych zbiorów.

W pewnych szczególnych przypadkach można mieć w (6) równość. Na przykład, jest tak, jeśli A jest podzbiorem wypukłym w uporządkowaniu ciągłym zbioru X.

Jeśli bowiem A jest podzbiorem wypukłym zbioru X uporządkowanego w sposób ciągły, to — zależnie od tego, czy jest zbiorem ograniczonym, czy nie, i czy należą lub nie doń jego kresy — zbiór A jest przedziałem, odcinkiem, półodcinkiem — ewentualnie końcowym lub początkowym — zbioru X. W każdym z tych przypadków sprawdza się łatwo, że $\mathcal{T}_A \subset \mathcal{T}_{porzA}$.

Oczywiście, ciągłość uporządkowania dziedziczona jest na zbiory wypukłe. Znaczy to, że *podzbiory wypukłe zbioru uporządkowanego w sposób ciągły są spójne*.

Wynikanie odwrotne jest oczywiste. Zatem:

W zakresie podzbiorów zbiorów uporządkowanych w sposób ciągły — w szczególności na prostej rzeczywistej — spójność podzbioru jest równoważna jego wypukłości.

Uporządkowanie leksykograficzne

Niech X i Y będą zbiorami uporządkowanymi. W ich produkcie $X \times Y$ — kolejność zbiorów gra rolę! — wprowadzamy uporządkowanie, przyjmując $(x, y) < (x', y')$, jeśli $x < x'$, a w przypadku $x = x'$, jeśli $y < y'$. O nierówności (ostrej) decydują *pierwsze* współrzędne, a kiedy one nie rozstrzygają, decydują *drugie*; w ten sposób porządkowane są słowniki. Określone w ten sposób uporządkowanie nazywamy uporządkowaniem *leksykograficznym* produktu.

Nazwijmy *pasem płaskim* produkt $E \times [0, 1]$ prostej rzeczywistej i jej odcinka jednostkowego.

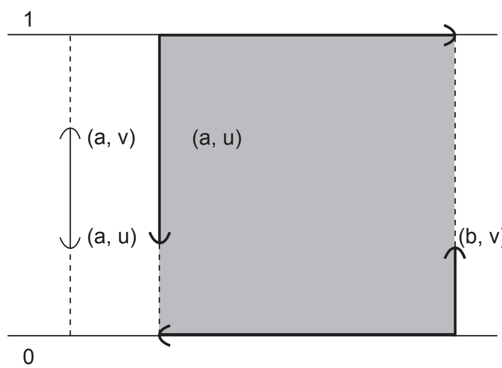
Uporządkowanie leksykograficzne pasa płaskiego jest ciągłe.

Istotnie, niech A będzie podzbiorem (niepustym) produktu $E \times [0, 1]$ ograniczonym z góry. Niech $x_* = \sup\{x : (x, t) \in A\}$. Niech $t_* = \sup\{t : (x_*, t) \in A\}$ (jeśli w zbiorze A nie ma elementów postaci (x_*, t), to $t_* = 0$). Łatwo sprawdzić, że punkt (x_*, t_*) jest kresem górnym zbioru A.

To, że uporządkowanie leksykograficzne zbioru $E \times [0,1]$ nie ma skoków, jest widoczne bezpośrednio.

Dowiedliśmy tym samym, że *topologia uporządkowania leksykograficznego pasa płaskiego* $E \times [0, 1]$ *jest spójna*.

Zwróćmy uwagę na postać, jaką mogą mieć przedziały uporządkowania leksykograficznego pasa płaskiego. Są wśród nich przedziały „duże”, zawierające całe prostokąty, tj. przedziały o końcach (a, u) i (b, v), gdzie $a < b$, oraz przedziały „szczupłe”, gdzie $a = b$. Pokazane są one na rys. 9.



Rys. 9. Przedziały pasa leksykograficznego

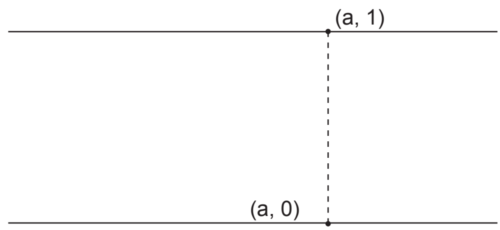
Uporządkowanie prostej $E \times \{1\}$ dziedziczone z $E \times [0, 1]$ jest izomorficzne ze zwykłym uporządkowaniem prostej, ale topologia dziedziczona z $E \times [0, 1]$ na tę prostą różni się od zwykłej: we wzorze (6) mamy tu ostre zawieranie. Jej bazą są przekroje przedziałów na $E \times [0, 1]$ z prostą $E \times \{1\}$. Są wśród nich, oprócz zwykłych przedziałów na prostej, półodcinki postaci $[a, b)$; patrz rys. 9. Ta topologia, bogatsza niż zwykła topologia prostej, jest nazywana *topologią Sorgenfreya*, a zbiór z tą topologią nazywany jest *prostą Sorgenfreya*. Analogiczną topologię — z bazą złożoną z półodcinków $(a, b]$ — mamy na prostej $E \times \{0\}$. Przykład prostych Sorgenfreya wskazuje na znaną już nam osobliwość topologii uporządkowań: topologia dziedziczona na podzbiór może być większa niż topologia uporządkowania dziedziczonego na ten podzbiór (wzór (6))[14].

Półodcinki są zbiorami *domknięto-otwartymi* prostej Sorgenfreya, bo ich dopełnienia są otwarte. Prosta Sorgenfreya nie jest więc spójna; co więcej, wspomniane zbiory domknięto-otwarte stanowią bazę jej topologii. Baza ta ma moc continuum.

Topologia Sorgenfreya nie ma bazy mocy mniejszej niż continuum.

Przypuśćmy bowiem *a contrario*, że prosta Sorgenfreya ma bazę $\mathcal{B}$ mocy $< c$. Wśród liczb należących do danego elementu bazy weźmy liczbę najmniejszą (jeśli istnieje). Tych liczb jest, oczywiście, mniej niż continuum. Niech a_* będzie liczbą rzeczywistą różną od nich wszystkich. Odcinek końcowy $[a_*, \infty)$ jest otwarty w sensie topologii Sorgenfreya; nie może być wszakże sumą elementów z bazy $\mathcal{B}$, bo punkt a_* nie należy do żadnego składnika tej sumy.

Rozważmy sumę obu prostych, tj. zbiór $E \times \{0, 1\}$, a na nim topologię dziedzczoną z topologii pasa płaskiego $E \times [0, 1]$. Ta topologia jest identyczna z topologią uporządkowania leksykograficznego zbioru $E \times \{0, 1\}$ — we wzorze (6) mamy tu równość (!). Tak określoną przestrzeń nazywamy *podwojoną prostą Sorgenfreya*[15].



Rys. 10. Podwojona prosta Sorgenfreya: każdy punkt jest jej lewym lub prawym punktem skoku

Stopień ośrodkowości, waga, liczba Suslina

Podzbiór D zbioru X z topologią $\mathcal{T}$ jest *gęsty w* X (*w sensie topologii* $\mathcal{T}$), jeśli w każdym zbiorze otwartym (w sensie topologii $\mathcal{T}$), niepustym, są punkty zbioru D. Dla gęstości podzbioru wystarczy, co łatwo zauważyć, by miał on punkty w każdym zbiorze z bazy topologii. Stąd *pojęcia gęstości porządkowej i gęstości w sensie topologii wyznaczonej przez uporządkowanie się pokrywają*.

Przez *stopień ośrodkowości* topologii $\mathcal{T}$ na zbiorze X rozumiemy minimum mocy podzbiorów zbioru X, gęstych w sensie topologii $\mathcal{T}$. Przestrzeń zawierająca podzbiór gęsty przeliczalny nazywana jest przestrzenią *ośrodkową*.

Prosta Sorgenfreya jest ośrodkowa, zawierając zbiór liczb wymiernych jako podzbiór gęsty.

---

[14] R.H. Sorgenfrey: *On the topological product of paracompact spaces*. Bull. Amer. Math. Soc. 53 (1947), s. 437—451.

[15] Podwojona prosta Sorgenfreya pojawia się już w latach dwudziestych w pracy P.S. Aleksandrowa i P.S. Urysohna: *Mémoire sur les espaces topologiques compacts*. Verhandelinger Kon. Akademie van Weténschappen, Amsterdam, 1 sektie, XIV, No 1, s. 1—96; cytowanie według tłumaczenia rosyjskiego w *Trudach po topołogii i drugim obłast' jam matiematiki*. T. 2. Moskwa—Leningrad 1951, s. 854—956.

Przez *wagę* topologii rozumiemy minimum mocy baz tej topologii. Przez *liczbę Suslina* topologii $\mathcal{T}$ na X rozumiemy kres górny mocy rodzin złożonych z podzbiorów zbioru X, rozłącznych i otwartych w sensie topologii $\mathcal{T}$. Jeśli liczba Suslina topologii nie przekracza $\aleph_0$, tj. jeśli rodziny zbiorów otwartych rozłącznych są co najwyżej przeliczalne, to mówimy, że topologia ma *własność Suslina*.

Dla każdej topologii prawdziwe są nierówności:

(7) *liczba Suslina* $\leqslant$ *stopień ośrodkowości* $\leqslant$ *waga*.

Już w zakresie topologii uporządkowań nierówności te mogą okazać się ostre.

Dość prosto wyjaśnia się związek stopnia ośrodkowości z wagą.

Twierdzenie. *Jeśli uporządkowanie nie ma skoków, to stopień ośrodkowości jest równy wadze*.

Dowód. Niech D będzie podzbiorem gęstym w topologii porządkowej zbioru X uporządkowanego bez skoków. Pokażemy — co wystarcza — że przedziały o końcach w zbiorze D stanowią bazę tej topologii. Wystarczy w tym celu pokazać, że przedział (a, b) o dowolnych końcach jest sumą przedziałów o końcach w zbiorze D, tj. że każdy punkt przedziału (a, b) leży w przedziale o końcach w zbiorze D.

Niech więc x będzie punktem przedziału (a, b), tzn. niech $a < x < b$. Wobec nieistnienia skoków przedziały (a, x) i (x, b) są niepuste. Wobec gęstości D istnieją w zbiorze D punkty d' i d'' takie, że $a < d' < x$ i $x < d'' < b$. Mamy $x \in (d', d'')$.

W szczególności, dowiedziona równość ma miejsce dla uporządkowań ciągłych. Na przykład pas płaski $E \times [0, 1]$ ma wagę i stopień ośrodkowości równy continuum. Liczba Suslina pasa płaskiego jest też równa continuum, co łatwo stwierdzić, widząc jej continuum zbiorów otwartych składających się na jej podprzestrzeń otwartą $E \times \{U\}$, gdzie U jest przedziałem odcinka $[0, 1]$ omijającym końce.

Jeśli uporządkowanie ma skoki, to — nawet jeśli nie ma luk — może mieć stopień ośrodkowości mniejszy niż wagę.

Przykładem jest *podwójna prosta Sorgenfreya*. Liczby wymierne leżące na $E \times \{1\}$ stanowią jeden z jej podzbiorów gęstych przeliczalnych.

Nie wspominamy przy tej okazji o prostej Sorgenfreya, której topologia nie jest topologią uporządkowania, dziedziczonego z podwojonej prostej Sorgenfreya, tj. z pasa płaskiego. Nie możemy jednak wykluczyć, że mogłaby być topologią jakiegoś innego uporządkowania — por. wszakże dalej, s. 25.

Podwójna prosta Sorgenfreya nie ma bazy, której moc byłaby $< c$, bo — jak widzieliśmy — nie ma tego rodzaju bazy jej podprzestrzeń $E \times \{1\}$ — prosta Sorgenfreya.

Stopień ośrodkowości podprzestrzeni może być większy niż stopień ośrodkowości przestrzeni[16]. W zakresie topologii uporządkowań ta anomalia się nie pojawia:

---

[16] Znanym przykładem na to jest przekątnia w kwadracie prostej Sorgenfreya.

Stopień ośrodkowości podprzestrzeni przestrzeni uporządkowanej nie przekracza stopnia ośrodkowości przestrzeni. W szczególności: *topologie uporządkowań są dziedzicznie ośrodkowe, jeśli są ośrodkowe.*

D o w ó d. Niech bowiem X będzie zbiorem uporządkowanym, D — podzbiorem gęstym zbioru X, A — podzbiorem zbioru X. W każdym odcinku $[d, d']$ zbioru X o końcach w zbiorze D weźmy po jedym punkcie zbioru A, jeśli takie punkty istnieją (pewnik wyboru). Moc utworzonego zbioru nie przekracza mocy zbioru D (bo $m \cdot m \leqslant m$ dla mocy m nieskończonych). Zbiór ten jest podzbiorem gęstym zbioru A.

T w i e r d z e n i e. *Liczba Suslina podprzestrzeni przestrzeni uporządkowanej nie przekracza liczby Suslina samej przestrzeni.*

D o w ó d. Niech A będzie podzbiorem przestrzeni uporządkowanej X. Niech $\mathcal{R}$ będzie rodziną podzbiorów otwartych w A, niepustych i rozłącznych, mającą moc $> m$. Pokażemy, że rodzinę podzbiorów o tych samych własnościach znajdziemy w przestrzeni X. Dla każdego zbioru U rodziny $\mathcal{R}$ weźmy zbiór H_U otwarty w X taki, że $A \cap H_U = U$.

Dla każdego ze zbiorów H_U rozważmy jego rozbicie na składowe wypukłości. Wobec otwartości H_U są one otwarte w X, a jako składowe są rozłączne. Jeśli $U \neq V$, to składowe zbiorów H_U i H_V mogą się przecinać, ale — wobec rozłączności U i V — ich przekrój nie ma punktów w zbiorze A.

Niech $\mathcal{R}'$ będzie rodziną złożoną ze wszystkich składowych wszystkich zbiorów H_U.

Elementy rodziny $\mathcal{R}'$ są zbiorami otwartymi wypukłymi przestrzeni X. Z wcześniej poczynionych uwag co do składowych łatwo wynika, że jeśli zbiory K, L i M rodziny R mają punkt wspólny, to zbiory U, V i W rodziny $\mathcal{R}$, którym one odpowiadają jako składowe zbiorów H_U, H_V i H_W, są różne. Stąd wynika, że każdy ze zbiorów rodziny $\mathcal{R}'$ przecina się z co najwyżej dwoma innymi zbiorami tej rodziny.

Rodzina złożona z wszystkich przekrojów niepustych rodziny $\mathcal{R}'$ jest rodziną zbiorów otwartych przestrzeni X wzajemnie rozłącznych. Jej moc jest $> m$. To kończy dowód.

Nieporządkowalność prostej Sorgenfreya

Topologia prostej Sorgenfreya — mimo że dziedziczona z topologii uporządkowania — nie jest topologią uporządkowania; nie tylko uporządkowania dziedziczonego z pasa leksykograficznego, ale i żadnego innego; inaczej: *jest nieporządkowalna*.

Dowód wymaga pewnego przygotowania.

Odnotujmy (co przyda się w dalszym rozumowaniu) nietrudny do dowodu fakt, że *składowe wypukłości zbiorów otwartych są otwarte*.

Przez *pseudobazę* topologii rozumie się rodzinę zbiorów otwartych tej topologii taką, że każdy punkt można otrzymać jako przekrój elementów tej rodziny. Łatwo sprawdzić, że dla topologii T_1 bazy są pseudobazami.

Lemat Harta. *Jeśli topologia uporządkowania ma pseudobazę mocy* $\leqslant m$ *i jej liczba Suslina jest* $\leqslant m$, *to (zakładając, że* m *jest nieskończone) ma bazę mocy* $\leqslant m$[17].

Dowód. Niech $\mathcal{T}$ będzie topologią uporządkowania zbioru X i niech $\mathcal{A}$ będzie jej pseudobazą. Rozbijmy zbiory pseudobazy $\mathcal{A}$ na składowe wypukłości. Ich ilość dla każdego elementu pseudobazy nie przekracza liczby Suslina dla $\mathcal{T}$, bo składowe wypukłości zbiorów otwartych niepustych mają wnętrza niepuste. Niech $\mathcal{B}$ będzie rodziną wszystkich wspomnianych składowych. Jeśli moc $\mathcal{A}$ i liczba Suslina topologii są $\leqslant m$, to moc rodziny $\mathcal{B}$ jest $\leqslant m \cdot m = m$ (założyliśmy, że m jest nieskończone).

Pokażemy, że rodzina $\mathcal{B}$ generuje topologię $\mathcal{T}$, co zakończy dowód.

Weźmy w tym celu punkt x w zbiorze X i przedział (a, b) wokół x. Wobec tego, że $\mathcal{A}$ — a więc tym bardziej i $\mathcal{B}$ — jest pseudobazą, istnieją zbiory U i V należące do $\mathcal{B}$ takie, że $x \in U$ i $a \notin$ U oraz $x \in V$ i $b \notin V$. Mamy więc $x \in U \cap V \subset (a, b)$, co dowodzi przesłanki.

Twierdzenie. *Topologia prostej Sorgenfreya nie może być wyznaczona przez żadne uporządkowanie*[18].

Dowód. Wobec ośrodkowości topologia Sorgenfreya ma własność Suslina, a przedziały o końcach wymiernych stanowią dla niej pseudobazę. Jeśliby topologia Sorgenfreya była wyznaczona przez uporządkowanie, miałaby, na mocy lematu Harta, bazę mocy $\leqslant \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.

Poruszyliśmy problem *porządkowalności*, który polega na podaniu warunków, jakie ma spełniać topologia, by mogła być wyznaczona przez uporządkowanie. W zakresie, który nas tu będzie najbardziej interesował, tj. w zakresie topologii spójnych, znane są warunki, jakie podał S. Eilenberg (1941). Będą one omówione w *Wykładzie III*[19].

---

[17] K.P. Hart: *On the weight and pseudo-weight of linearly ordered topological spaces*. Proc. Amer. Math. Soc. 82 (1981), s. 501—502.

[18] Inne dowody: D.J. Lutzer: *A metrization theorem for linearly ordered spaces*. Proc.Amer. Math. Soc. 22 (1969), s. 557—558; P. van Ende Boas i in.: *Cardinal functions on ordered spaces*. Math. Centre Amsterdam 1970, rapport 2N 33// 70; M.J. Faber, M.A. Maurice, E. Wattel: *Ordered preimages under one to one mappings. Theory of Sets and Topology*. Berlin 1972, s. 104—110; A. Emeryk, R. Frankiewicz, W. Kulpa: *Orderability of GO-spaces*. *Topological Structures II*. Mathematical Centre Tracts 115 (1979), s. 73—78.

[19] Na temat porządkowalności w zakresie topologii metrycznych por. S. Purisch: *The orderallity of metric spaces*. Trans. Amer. Math. Soc. 226 (1977), s. 39—46, a w zakresie ogólnym — J. van Dalen, E. Wattel: *A topological characterization of ordered spaces*. General Topology and its Appl. 3 (1973), s. 347—354. Problem nie jest wszakże ostro postawiony, jeśli się nie powie, o jaki rodzaj warunków chodzi. Dlatego rozwiązania mogą być nieporównywalne: G.S. Young Jr.: *it Continuous selections on locally compact separable metric spaces*. In: *Lecture Notes in Mathematics*. 171: *Set-Valued Mappings, Selections and topological properties of* 2^X. Springer 1970,

O problemie Suslina

Wiadomo, że dla przestrzeni metrycznych stopień ośrodkowości i waga są równe. Są one wtedy równe też liczbie Suslina, do czego, wobec (7) wystarczy znać

Twierdzenie. *Dla przestrzeni metrycznych stopień ośrodkowości nie przekracza liczby Suslina.*

Dowód. Rozważmy w tym celu dla danej przestrzeni metrycznej, dla każdej liczby naturalnej n, podzbiory maksymalne wśród takich, których każde dwa punkty są w odległości $> \frac{1}{n}$. Moce tych zbiorów nie przekraczają liczby Suslina, ich suma również nie przekracza tej mocy i jest żądanym podzbiorem gęstym.

Z uwagi na przypomniane równości prosta Sorgenfreya nie jest przestrzenią metryzowalną, będąc przestrzenią ośrodkową niemającą bazy przeliczalnej. Zawierająca ją podwójna prosta Sorgenfreya również nie jest metryzowalna.

Nierówność między liczbą Suslina a stopniem ośrodkowości stwarza problem już w zakresie topologii uporządkowań, nawet jeśli liczba Suslina jest $\aleph_0$, tj. jeśli uporządkowanie ma *własność Suslina*. Według *hipotezy Suslina*, uporządkowanie powinno być wtedy ośrodkowe[20].

Jak dowiódł G. Kurepa (1951) *jeśli liczba Suslina uporządkowania jest* $\leqslant \aleph_0$, *to jego stopień ośrodkowości jest* $\leqslant \aleph_1$. Wynika to z następującego twierdzenia bardziej szczegółowego.

Twierdzenie Papicia[21]. *Jeśli X jest zbiorem uporządkowanym o własności Suslina, to istnieje ciąg pozaskończony wstępujący*

$$\{F_\alpha : \alpha < \omega_1\}$$

podprzestrzeni domkniętych ośrodkowych, dających w sumie zbiór X.

Dowód. Niech $F_0 = \varnothing$. Jeśli β jest liczbą graniczną i zbiory F_α, $\alpha < \beta$ są już określone (ze spełnieniem zapowiedzianych warunków), to niech

$$F_\beta = cl \cup \{F_\alpha : \alpha < \beta\}. \tag{8}$$

Dla liczb niegranicznych przyjmujemy

$$F_{\beta+1} = F_\beta \cup clA_\beta, \tag{9}$$

gdzie A_β jest zbiorem mającym po jednym punkcie w każdej składowej zbioru $X - F_\beta$.

---

s. 102—110; G.I. Czertanow: *Uporiadocziwajemost' topołogiczeskich prostranstw.* Uspiechi Mat. Nauk. 39. wyp. 2 (236), s. 203—204.

[20] Hipoteza postawiona przez M. Suslina, Fund. Math. 1 (1920), s. 223, *Problème 3*.

[21] P. Papić: *Sur le continu de Souslin*. Glasnik Matematicky 6 (1971), s. 351—355. Por. G. Kurep: *La condition de Souslin et une propriété caratéristique des nombres réels*. C.R. Acad. Sci. Paris 231 (1950), s. 1113—1114. Por. także B. Knaster: *Sur une propriété caractéristique d'ensemble des nombres reéels*. Rec. Math. Moscou 16 (1945), s. 281—290; przyp. 7.

Operacje w (8) i (9) nie wyprowadzają poza podprzestrzenie (domknięte) ośrodkowe; przeliczalność zbioru A_β w (9) wynika z własności Suslina przestrzeni X.

Mamy $F_\alpha \subset F_{\alpha'}$, jeśli $\alpha < \alpha'$.

Pokażemy, że suma zbiorów F_α, $\alpha < \omega_1$ jest zbiorem domkniętym w X.

Dla dowodu weźmy punkt x w zbiorze X będący punktem skupienia sumy zbiorów F_α. Ustalmy, że x jest punktem skupienia lewostronnym, nienależącym do tej sumy. Dla każdego α weźmy pod uwagę przedział J_α maksymalny wśród mających jako prawy koniec punkt x i rozłącznych z F_α.

Mamy $J^*_{\alpha'} \subset J^*_\alpha$, jeśli $\alpha < \alpha'$ i wszystkie te przedziały są niepuste. Inkluzji ostrych jest co najwyżej przeliczalnie wiele, co wynika z własności Suslina uporządkowania zbioru X. Stąd $\alpha = const.$ począwszy od pewnego wskaźnika. Wynika stąd, że punkt x, mając na lewo od siebie przedział bez punktów zbiorów F_α, nie jest lewostronnym punktem skupienia sumy tych zbiorów, co założyliśmy prowadząc dowód. Sprzeczność.

Przypuśćmy teraz, że suma zbiorów F_α, $\alpha < \omega_1$, nie jest równa X. Wobec dowiedzionej domkniętości sumy, jej dopełnienie jest sumą przedziałów; wśród nich co najmniej jeden jest niepusty. Końce tego przedziału należą, oba — jeśli są dwa — do jednego i tego samego zbioru F_α. Wobec (9), zbiór $F_{\alpha+1}$, a więc i cała suma, ma punkt w tym przedziale. Dostajemy sprzeczność, która kończy dowód.

Wiadomo — lata sześćdziesiąte — że środkami teorii ZFC nie da się polepszyć oszacowania stopnia ośrodkowości danego przez to twierdzenie, tj. nie można środkami ZFC dowieść hipotezy Suslina. Nie można również środkami ZFC obalić hipotezy Suslina[22].

Założenie ciągłości uporządkowania nie usuwa trudności związanych z problemem Suslina. Jeśli bowiem istnieje uporządkowanie przeczące hipotezie Suslina, to usuwając zeń maksymalne przedziały ośrodkowe[23] i likwidując skoki (przez usunięcie z każdego skoku jednego punktu), dostajemy uporządkowanie ciągłe przeczące hipotezie Suslina — *prostą Suslina*.

Odstęp „o jeden” utrzymuje się dla mocy wyższych[24]: *jeśli liczba Suslina uporządkowania jest* $\leqslant \mathfrak{m}$*, to jego stopień ośrodkowości jest* $\leqslant \mathfrak{m}^+$; przez $\mathfrak{m}^+$ rozumiana jest liczba kardynalna następna po $\mathfrak{m}$[25].

---

[22] Na temat tych rezultatów z podstaw teorii mnogości por. T.J. Jech: *Lectures in Set Theory.* (Springer) Lecture Notes in Math. 217 (1971) (tłum. ros., Mir 1973).

[23] Istnienie maksymalnych przedziałów ośrodkowych (przy założeniu, że liczba Suslina jest $\leqslant \aleph_0$) jest pewnym problemem, który pozostawiamy do przemyślenia. Oczywiście, jest ich przeliczalnie wiele.

[24] Por. wzmiankę u J.I Juhasza: *Cardinal functions in topology.* Math. Centre Tracts, Amsterdam 1971; na s. 15. Samo twierdzenie o stopniu ośrodkowości jest również u M.E. Rudin: *Souslin Conjecture*. Amer. Math. Monthly 76 (1969), s. 1113—1119.

[25] Na temat hipotezy Suslina i hipotez pokrewnych por. artykuł J. Mioduszewskiego: *O hipotezie Suslina i aksjomacie Martina*. Wiad. Mat. 21 (1978), s. 1—12. Por. też artykuł M.E. Rudin: *Souslin Conjecture...*, a także książkę K. Devlina, H. Johnsbrattena: *The Suslin Problem.*

Zwartość

Topologia jest *zwarta* — mówi się też *pokryciowo zwarta* — jeśli każde jej pokrycie zbiorami otwartymi zawiera pokrycie skończone. W warunku zwartości — co łatwo widać — wystarczy mieć na uwadze pokrycia złożone ze zbiorów ustalonej bazy topologii. Wobec tego, że przedziały stanowią bazę topologii porządkowej, warunek zwartości w przypadku topologii wyznaczonej przez uporządkowanie sprowadza się do tego, by każde pokrycie przedziałami zawierało pokrycie skończone[26].

Twierdzenie: *Jeśli uporządkowanie ma elementy skrajne i nie ma luk, to topologia tego uporządkowania jest zwarta*.

Dowód. Niech a i b będą elementami, pierwszym i ostatnim, zbioru X uporządkowanego bez luk. Niech $\mathcal{P}$ będzie pokryciem zbioru X przedziałami. Niech A będzie zbiorem punktów x takich, że odcinki $[a, x]$ są pokryte skończoną ilością zbiorów z pokrycia $\mathcal{P}$. Niech s będzie kresem górnym wspomnianych punktów x.

Pokażemy, że

$$s \in A, \tag{10}$$

a następnie, że

$$s = b \tag{11}$$

Dla dowodu (10) niech U będzie przedziałem z pokrycia $\mathcal{P}$ takim, że $s \in U$. Jeśli na lewo od s są w U punkty, to biorąc z nich jakikolwiek y, stwierdzamy, że $[a, s]$ jest pokryte skończoną ilością elementów z $\mathcal{P}$, na co składa się skończona ilość elementów pokrywających odcinek $[a, y]$ i przedział U. Zatem w tym przypadku $s \in A$.

Jeśli na lewo od s nie ma w U żadnych punktów, to s jest prawym elementem skoku $y < s$, i gdyby s nie należało do A, tj. jeśliby $[a, s]$ nie miało pokrycia skończoną ilością elementów z $\mathcal{P}$, to y byłoby kresem górnym rozważanych przez nas prawych końców odcinków $[a, x]$. Sprzeczność.

Dla dowodu (11) przypuśćmy, że $s < b$. Znowu pewien przedział U z pokrycia $\mathcal{P}$ nakrywa s. Jeśli w U są punkty leżące na prawo od s, to biorąc z nich którykolwiek y, stwierdzamy, że odcinek $[a, y]$ daje się pokryć skończoną ilością elementów z $\mathcal{P}$, na co składa się skończenie wiele elementów pokrywających $[a, s]$ (korzystamy z (10)) oraz przedział U. Sprzeczność, bo $y > s$. Jeśli w U nie ma na prawo od s punktów, to wobec $s < b$, s jest punktem

Lecture Notes in Math. Springer 405 (1974) i książkę J. Cichonia i A. Charaziszwiliego i B. Węglorza: *Subsets of real line*. Łódź 1995, s. 149—158. Na temat własności hipotetycznej *prostej Suslina* i pewnych konsekwencji twierdzenia Papicia, B.A. Jefimow i G.I. Czertanow: *O dwuch swojstwach kontinuuma Suslina*. Matematica Balcanica 6:9 (1976), s. 47—54.

[26] Topologiom zwartym wyznaczonym przez uporządkowania poświęcona jest książka M.A. Maurice'a: *Compact ordered spaces*. Mathematical Centre Tracts (Amsterdam) 6, 1970.

skoku $s < y$. Ponieważ punkt y nakryty jest pewnym elementem pokrycia $\mathcal{P}$, odcinek $[a, y]$ nakryty jest skończoną ilością elementów z $\mathcal{P}$, na co składa się skończona ilość przedziałów z $\mathcal{P}$ pokrywających $[a, s]$ (korzystamy z (10)) i przedział V. Sprzeczność, bo $y > s$.

Dowiedliśmy w ten sposób zwartości odcinków prostej, jak również zwartości odcinków prostej Sorgenfreya.

Prawdziwe jest twierdzenie odwrotne do dowiedzonego.

Dowód. Jeśli bowiem uporządkowanie zbioru X ma lukę bądź nie ma jednego z elementów skrajnych, to istnieje rozbicie zbioru X na zbiory A i B, z których jeden jest być może pusty, takie, że $x < y$, jeśli $x \in$ A i y $\in$ B, i takie, że w zbiorze A nie ma elementu największego, a w B najmniejszego. Zbiory $U_{\alpha,\beta} = \{x : x < \alpha\} \cup \{x : x > \beta\}$, $\alpha \in A$, $\beta \in B$, pokrywają X. Żadna skończona ilość tych zbiorów nie pokrywa zbioru X, bo suma skończonej ilości tego rodzaju zbiorów jest jednym z nich, a żaden ze zbioru $U_{\alpha,\beta}$ nie jest równy X.

Zwartość ciągowa

Przez *zwartość ciągową* rozumie się własność przestrzeni topologicznej polegającą na tym, że każdy ciąg $a_1, a_2, \ldots$, jej elementów zawiera podciąg a_{n1} , a_{n2} , $\ldots$, $n_1 < n_2 < \ldots$, zbieżny.

Pojęcia zwartości ciągowej i zwartości pokryciowej rozchodzą się w zakresie przestrzeni topologicznych ogólnych[27]. Zobaczymy, że nie są sobie równoważne także w zakresie topologii uporządkowań. Ale

Twierdzenie. *W zakresie topologii uporządkowań zwartość pokryciowa pociąga zwartość ciągową.*

Lemat. *Ciąg nieskończony elementów zbioru uporządkowanego zawiera podciąg nieskończony monotoniczny.*

Dowód lematu. Niech $\{b_1, b_2, \ldots\}$ będzie danym ciągiem. Nie zmniejszymy ogólności, jeśli założymy, że elementy ciągu są różne. Niech A będzie zbiorem wartości ciągu.

Przypuśćmy, że z elementów zbioru A nie można utworzyć ciągu malejącego. Jeśli tak, to każdy podzbiór (niepusty) zbioru A ma element najmniejszy[28].

Ta uwaga pozwala na zbudowanie ciągu rosnącego złożonego z elementów zbioru A. Pierwszym elementem a_1 tego ciągu niech będzie najmniejszy element zbioru A. Niech a_2 będzie najmniejszym elementem zbioru A wśród późniejszych niż a_1, ele-

---

[27] Pojęcia te pokrywają się dla przestrzeni metrycznych, co dalej zostanie wykorzystane; dowód por. R. Engelking: *Topologia ogólna*..., s. 309.

[28] Inaczej mówiąc, jeśli każdy ciąg malejący w zbiorze uporządkowanym jest skończony, to zbiór jest *dobrze uporządkowany*; por. K. Kuratowski, A. Mostowski: *Teoria mnogości*. Warszawa 1978, s. 228.

mentem a_3 najmniejszy element zbioru A wśród późniejszych niż a_2 itd. Postępując w ten sposób, dostajemy ciąg rosnący $a_1 < a_2 < a_3\ldots$ elementów zbioru A.

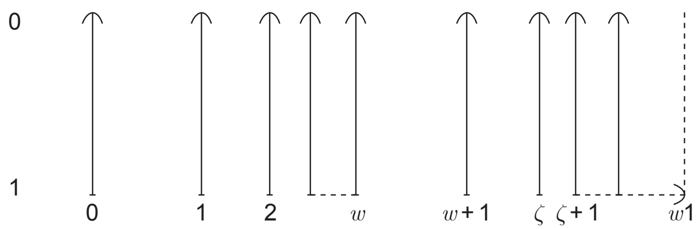
Nie musi być to wszakże podciąg danego ciągu. W danej numeracji ciągu $\{b_1, b_2, ...\}$ element a_1 pokrywa się z pewnym jej elementem b_{n1}. Wśród elementów $\{a_2, a_3, ...\}$ (różnych) weźmy element b_{n2}, $n_2 > n_1$ (z najmniejszym możliwym wskaźnikiem dla uniknięcia nieokreśloności wyboru). Postępując tak dalej, dostajemy podciąg rosnący $b_{n1} < b_{n2} < ...$, $n_1 < n_2 < ...$, ciągu $\{b_1, b_2,...\}$.

D o w ó d t w i e r d z e n i a. Niech X będzie zbiorem z uporządkowaniem wyznaczającym topologię zwartą pokryciowo (tj. takim, w którym zbiory ograniczone mają kresy). Niech $\{a_1, a_2, ...\}$ będzie ciągiem elementów zbioru X. Niech a_{n1}, $a_{n2},\ldots$, $n_1 < n_2 < \ldots$, będzie podciągiem niemalejącym tego ciągu, którego istnienie — ewentualnie istnienie podciągu nierosnącego — wynika z lematu. Mamy $a_{n1} \leqslant a_{n2} \leqslant ...$ Niech s będzie kresem górnym zbioru $\{a_{n1}, a_{n2}, \ldots\}$. Mamy $s = \lim a_{nk}$.

Zwartość ciągowa nie pociąga — w zakresie topologii uporządkowań — zwartości pokryciowej.

Przykładem jest zbiór liczb porządkowych $< \omega_1$, którego topologia nie jest z oczywistych powodów zwarta pokryciowo, a jest zwarta ciągowo, bo każdy ciąg $a_1, a_2,\ldots$ liczb porządkowych $< \omega_1$ jest ograniczony przez liczbę α, $\alpha < \omega_1$ i odcinek $[0, \alpha]$, w którym leży zbiór wartości ciągu, ma bazę przeliczalną, więc jest metryzowalny, zatem jako zwarty pokryciowo jest ciągowo zwarty.

Porządkując leksykograficznie produkt $\{\xi : 0 \leqslant \xi < \omega_1\} \times [0, 1)$, dostajemy zbiór uporządkowany nazywany *długą prostą*. Wizualnie, polega to na zapełnieniu skoków zbioru $\{\xi : 0 < \xi < \omega_1\}$ odcinkami prostej rzeczywistej (por. rys. 11).



Rys. 11. Długa prosta

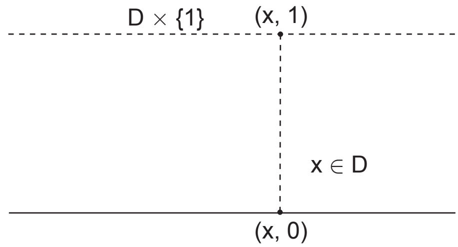
Długa prosta — a to samo dotyczy zbioru liczb porządkowych $\leqslant \omega_1$, jest zwarta ciągowo, ale nie pokryciowo.

Zbiór Cantora

Przyjmujemy, że zbiór Cantora i jego własności topologiczne są znane. Podany tu inny opis tego zbioru motywowany jest z jednej strony tym, że omawiany jest właśnie produkt leksykograficzny, a z drugiej tym, że ten opis będzie przydatny w dalszych wykładach.

Rozważmy na odcinku $[0, 1]$ zbioru liczb rzeczywistych jakikolwiek podzbiór D przeliczalny i gęsty; przyjmijmy, że końce 0 i 1 nie należą do D.

Rozważmy podzbiór C produktu $[0, 1] \times \{0, 1\}$ złożony z punktów $(x, 0)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, i punktów $(x, 1)$, $x \in D$. Uporządkowanie leksykograficzne zbioru C ma elementy skrajne $(0, 0)$ i $(1, 0)$, ma skoki $(x, 0) < (x, 1)$, $x \in D$, nie ma luk.



Rys. 12. Punkt x zbioru D zastępujemy skokiem

Dla dowodu, że w zbiorze C nie ma luk niech A będzie podzbiorem zbioru C. Pokażemy — co wystarczy do zakończenia dowodu — że istnieje w C kres górny zbioru A. Jest nim punkt (s, c) zbioru C, gdzie s jest kresem górnym pierwszych współrzędnych punktów ze zbioru A, a c jest równe 0 lub 1, zależnie od położenia zbioru A w C. Mianowicie, jeśli s nie jest współrzędną żadnego punktu zbioru A, to $c = 0$. Jeśli są punkty w A o współrzędnej s, to są wtedy co najwyżej dwa punkty o tej współrzędnej; za c bierzemy większą z ich drugich współrzędnych.

Topologia zbioru C jest więc zwarta i — jako topologia uporządkowania — spełnia warunek T_2 Hausdorffa. Nie ma w C punktów izolowanych. Zbiór C ma bazę przeliczalną złożoną ze *zbiorów domknięto-otwartych*, którymi są przedziały o końcach $(x, 0)$ i $(y, 1)$, $x < y$, gdzie x i y należą do D.

Przestrzeń o tych własnościach jest homeomorficzna z trójkowym zbiorem Cantora[29], na mocy znanej charakteryzacji topologicznej.

Zbiór Cantora uzyskaliśmy, zastępując każdy punkt pewnego podzbioru gęstego przeliczalnego skokiem. Podwójna prosta Sorgenfreya powstaje z prostej przez zastąpienie każdego (!) punktu prostej skokiem. Zarówno w przypadku zbioru Cantora, jak i podwójnej prostej Sorgenfreya skoki są z sobą rozłączne.

Istnieje odwzorowanie ciągłe zbioru Cantora $C = (0, 1] \times \{0\} \cup \mathrm{D} \times \{1\}$ na odcinek $0 \leqslant x \leqslant 1$. Polega ono na utożsamieniu punktów $(w, 1)$ z punktami $(w, 0)$ przy pozostawieniu innych punktów na miejscu. Jest to dobrze znana skądinąd *funkcja Cantora—Lebesgue'a*[30].

Zbiór Cantora w tym leksykograficznym ujęciu jest nadzbiorem odcinka $0 < x \leqslant 1$. Ale niewiele potrzeba, aby ten zbiór zobaczyć — w naturalnej postaci — jako podzbiór prostej rzeczywistej.

Dodajmy bowiem do zbioru $C = (0, 1] \times \{0\} \cup \mathrm{D} \times \{1\}$ przedziały $(0, 1)$ nad punktami zbioru D, tj. zbiory $\{(w, t) : 0 < t < 1\}$, gdzie $w \in D$, i rozważmy uporządkowanie leksykograficzne na tym zbiorze. Uporządkowanie to nie ma już skoków (zostały zapełnione przedziałami), pozostaje nadal ciągłe i ośrodkowe.

---

[29] Korzystamy ze znanej charakteryzacji topologicznej zbioru Cantora — twierdzenia dowiedzionego niezależnie (1927) przez F. Hausdorffa: *Mengenlehre*. Berlin—Leipzig 1927 i P.S. Aleksandrowa: *Wwiedienije w tieoriju mnożestw i funkcji*. Moskwa—Leningrad 1948.

[30] G. Cantor: *De la puissance des ensembles parfaits de points*. Acta Mathematica 4 (1884), s. 381—392. Wcześniej zbiór Cantora pojawił się w teorii całki, uwidaczniając w licznych kontrprzykładach potrzebę ogólniejszego pojęcia całki, późniejszej całki H. Lebesgue'a (1903).

Otrzymaliśmy więc zbiór izomorficzny porządkowo z odcinkiem liczb rzeczywistych — końcami są punkty (0, 1) i (1, 0) — z położonym na nim zbiorem Cantora. Przy tym sposobie widzenia zbioru Cantora funkcję Cantora—Lebesgue'a otrzymuje się przez usunięcie z każdego skoku jednego punktu.

Kontinua uporządkowane

Przestrzenie zwarte i spójne nazywane są *kontinuami*. Przykładem są odcinki uporządkowań ciągłych, wśród nich odcinki zbioru liczb rzeczywistych. Z twierdzeń Cantora wynika, że odcinki uporządkowań ciągłych ośrodkowych są izomorficzne z odcinkami zbioru liczb rzeczywistych. Odcinki nieośrodkowe nazywane są *odcinkami uogólnionymi*.

Odcinki uporządkowania leksykograficznego, długa prosta dopełniona punktem ω_1 i odcinki prostych Suslina są przykładami odcinków uogólnionych[31].

Odcinki, w tym odcinki uogólnione, obejmowane razem nazwą *kontinuów porządkowych*, są pierwszym krokiem w teorię kontinuów. W zakresie kontinuów metrycznych ten krok jest skromny, bo jest wśród nich tylko jeden typ topologiczny: wszystkie są homeomorficzne z odcinkiem [0, 1] liczb rzeczywistych.

---

[31] Odcinki uogólnione o stopniu ośrodkowości $\aleph_1$ — tj. takim, jaki mają odcinki prostych Suslina — były przedmiotem pracy J. Nováka: *On some ordered continua of power* $2^{\aleph_0}$ *containing a dense subset of pover* $\aleph_1$. Czechoslovak Mat. J. 1 (1951), s. 77—99; patrz komentarz w pracy M.A. Maurice'a: *Compact ordered spaces...*

Wykład III. Spójność przestrzeni topologicznych ogólnych

Przestrzenie spójne — określenie * Podstawowe własności * Spójność a odwzorowania ciągłe * Zbiory spójne * Spójność a produktowanie * O kontinuach * Moc zbiorów spójnych * Przykład Binga * Składowe i quasi-składowe * Zwiększanie topologii a spójność * Topologia gęstościowa * Lokalna spójność * Przestrzenie lokalnie spójne * Produkty przestrzeni lokalnie spójnych * Twierdzenie Eilenberga

Pojęcie spójności wyodrębnione na użytek zbiorów uporządkowanych przeniesiemy teraz na ogólne przestrzenie topologiczne. Zobaczymy, że spójność w zakresie przestrzeni topologicznych ogólnych, nie zakładamy na razie zwartości i nie narzucamy od razu warunków oddzielania, nie zawsze spełnia oczekiwania, jakie wiąże się z ogólną ideą continuum.

Przestrzenie spójne — określenie

Przestrzeń topologiczna jest nazywana *przestrzenią spójną*, jeśli nie można jej rozbić[32] na dwa podzbiory otwarte lub — co na jedno wychodzi — na dwa zbiory domknięte. Inaczej: przestrzeń jest spójna, jeśli nie zawiera żadnego podzbioru domknięto-otwartego, tj. równocześnie domkniętego i otwartego — w skrócie: d.-o. — niepustego i różnego od całości.

Jeśli więc przestrzeń *X nie jest spójna*, to zawsze można ją przedstawić w postaci:

$$X = U \cup V,$$

gdzie U i V są otwarte w przestrzeni X, niepuste i rozłączne.

Na przestrzeń topologiczną składa się *zbiór* jej punktów i *topologia*, czyli rodzina jej wszystkich podzbiorów otwartych. Będziemy więc mówić także o *topologiach spójnych*, mając na myśli topologie przestrzeni spójnych.

Dopóki ma się na myśli topologię uporządkowań, np. prostą i jej podzbiory, to — jak widzieliśmy — pojęcie spójności sprowadza się do ciągłości uporządkowania.

Rozpatrując przestrzenie zwarte metryczne, można, za Cantorem (1883), rozumieć zbiór spójny jako taki, w którym dla każdych dwu punktów a i b oraz każdego $\varepsilon > 0$ istnieje ciąg skończony punktów przestrzeni, w którym kolejne dwa punkty są w odległości nie większej niż ε; mówi się wtedy, że każde dwa punkty dają się połączyć ε-łańcuchem. Przy założeniu zwartości jest to w oczywisty sposób równoważne spójności. Własność Cantora nie pociąga spójności, jeśli wyjść poza przestrzenie zwarte, na co przykładem jest np. zbiór liczb wymiernych.

---

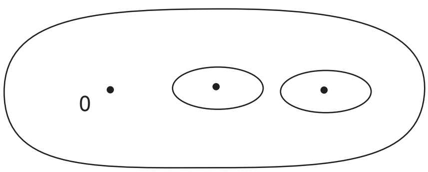
[32] Przypomnienie: rozbicie znaczy rozbicie na zbiory niepuste.

Według rozeznania autora, ogólne pojęcie przestrzeni topologicznej oparte na pojęciu zbioru otwartego, w tym i pojęcie spójności, zawdzięczamy Fredericowi Rieszowi[33], który w obszernej rozprawie odrzucił wspomnianą wyżej propozycję Cantora, która redukowałaby pojęcie spójności do w sobie gęstości przestrzeni. Przychylamy się do poglądu wypowiadanego przez wielu[34], że pojęcie spójności jest dla topologii mnogościowej kluczowe.

Ale pojęcie zbioru spójnego w tym duchu pojawiło się w tym samym czasie również u N.J. Lennesa[35], chociaż — jak pisze K. Kuratowski w *Topologie II* (s. 79) — ideę tę można znaleźć u Jordana i u A. Schoenfliesa[36]. Pojęcie spójności w formie, o której mówimy, jak i pojęcie przestrzeni topologicznej weszły na stałe do literatury matematycznej za sprawą *Grundzüge der Mengenlehre* (1914) F. Hausdorffa. Na temat genezy pojęcia spójności począwszy od Cantora por. artykuł R.L. Wildera *Evolution of the topological concept of „connected”*. Amer. Math. Monthly 85 (1978), 720—726 oraz komentarze w książce W. Wilkosza.

Podstawowe własności

Oczywiście, topologie *trywialne*, których jedynymi zbiorami otwartymi jest cały zbiór punktów przestrzeni i zbiór pusty, są spójne. Spośród topologii na zbiorze dwuelementowym jedynie topologia dyskretna nie jest spójna; spójna jest np. topologia, w której jeden z punktów, ale nie drugi, uznany jest za otwarty. Topologia ta jest klasy T_0, ale nie T_1. Ogólniej, spójnymi są topologie na zbiorach $\{0, 1, \ldots, m - 1\}$ reszt modulo m, w których wszystkie punkty, z wyjątkiem jednego, ustalamy, że jest to 0, są uznane za otwarte, rys. 13.



Rys. 13. Topologia spójna na zbiorze trójelementowym; podzbiory otwarte niepuste zamknięte sąm w owalach

Topologie T_1 na zbiorach skończonych są zawsze dyskretne, ale już na zbiorach przeliczalnych mogą być spójne; przykładem jest topologia, w której za zbiory otwarte uznaje się zbiory o dopełnieniach skończonych.

Spójność a odwzorowania ciągłe

Jeśli topologię zmniejszyć, spójność się zachowa, co jest oczywiste, bo nie pojawią się wtedy nowe zbiory otwarte, a więc i nowe rozbicia. Rozszerzeniem tej uwagi jest

---

[33] F. Riesz: *Die Genesis der Raumbegriffes*. Math. u. naturwiss. Berichte aus Ungarn 24 (1907), s. 309—353; wcześniejsza wersja: *A terfolgalom genesise*. Math. U. Ph. Lapok 15 (1906), s. 97—122.

[34] P.S. Aleksandrow, Usp. mat, nauk 1947.

[35] N.J. Lennes: *Curves in non-metric analysis situs*. Bull, Amer. Math. Soc. 12 (1905—1906), s. 284.

[36] *Cours d'analyse* C. Jordana (Paryż 1893), A. Schoenfliesa: *Beiträge zur Theorie des Punktmengen l*. Math. Ann. 58 (1904).

Twierdzenie. *Obraz ciągły przestrzeni spójnej jest przestrzenią spójną.*

Dowód. Niech X będzie przestrzenią spójną i niech $f: X \to Y$ będzie odwzorowaniem ciągłym na przestrzeń Y. Jeśliby Y miało rozbicie na dwa zbiory otwarte, to X miałoby rozbicie na ich przeciwobrazy, które są otwarte (na mocy ciągłości f) i niepuste (bo f jest odwzorowaniem na Y). Sprzeczność.

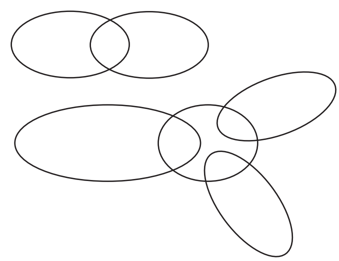
Spójność zachowuje się więc w szczególności przy przejściu do obrazu homoeomorficznego. Ten wniosek można wszakże wydostać również i stąd, że pojęcie spójności jest pojęciem topologicznym, tj. wyrażającym się w języku algebry podzbiorów zbioru stanowiącego przestrzeń i topologii. Oczywiście, homeomorfizmy zachowują również niespójność — zaprzeczenie spójności — czego nie można w całej ogólności powiedzieć o odwzorowaniach ciągłych — przypomnijmy funkcję Cantora–Lebesgue'a ze zbioru Cantora na odcinek.

Zbiory spójne

Podzbiór przestrzeni dziedziczący z niej topologię spójną będziemy nazywać *podzbiorem spójnym* tej przestrzeni lub po prostu *zbiorem spójnym*, jeśli przestrzeń będzie ustalona.

Suma zbiorów spójnych nie musi być spójna, ale

Suma dwóch zbiorów o przekroju niepustym jest spójna.



Rys. 14. Sytuacje, w których suma zbiorów spójnych jest spójna

Ogólniej:

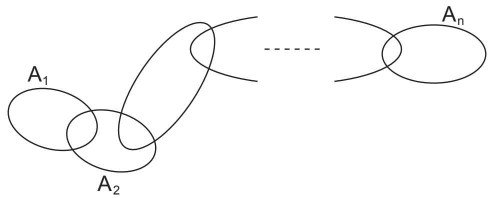
Suma zbiorów spójnych, mających przekroje niepuste z jednym spośród nich, jest spójna.

Dowód. Niech C będzie tym zbiorem rodziny, z którym wszystkie rozważane zbiory mają przekrój niepusty. Jeśli sumę wszystkich rozważanych zbiorów rozbić na dwa zbiory otwarte, to w jednym z tych zbiorów, oznaczmy ten zbiór przez U, są punkty zbioru C. Wobec spójności zbiór C zawiera się w U. Stąd każdy z rozważanych zbiorów ma punkty w U, a zatem też zawiera się w U. Cała suma zawiera się w U, co znaczy, że drugi człon rozbicia (1) musiałby być pusty. Sprzeczność.

W szczególności, *suma zbiorów spójnych mających punkt wspólny jest zbiorem spójnym.*

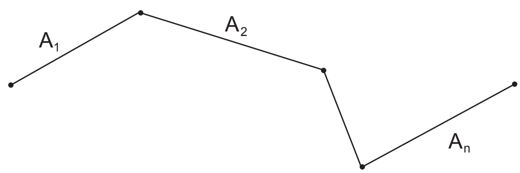
Mówimy, że zbiory $A_1, \ldots, A_n$ tworzą *łańcuch*, jeśli kolejne spośród nich przecinają się. Przez indukcję łatwo przekonujemy się, że

Suma zbiorów spójnych tworzących łańcuch jest spójna.



Rys. 15. Łańcuch zbiorów spójnych

Przykładem łańcucha są odcinki tworzące *łamaną* — rys. 16.



Rys. 16. Łamana

W określeniu łańcucha dopuszczamy przecinanie także niekolejnych zbiorów.

Jeśli każde dwa punkty przestrzeni dają się w niej połączyć zbiorem spójnym, tj. jeśli istnieje podzbiór spójny, do którego oba te punkty należą, to przestrzeń jest spójna.

Dowód. Przypuśćmy, że przestrzeń nie jest spójna, tj. że ma rozbicie na zbiory otwarte U i V. Weźmy po punkcie w każdym z tych zbiorów i niech C będzie podzbiorem spójnym, do którego należą wspomniane punkty. Wtedy $C \cap U$ i $C \cap V$ tworzą rozbicie zbioru C na zbiory w nim otwarte, co przeczy spójności zbioru C.

Możliwość łączenia każdych dwóch punktów pewnymi specjalnymi zbiorami spójnymi mieści się we wspomnianej wcześniej idei Cantora spójności. To praktyczne kryterium spójności ma nadal duże znaczenie.

Podzbiór płaszczyzny, w którym każde dwa punkty można połączyć łamaną, jest spójny.

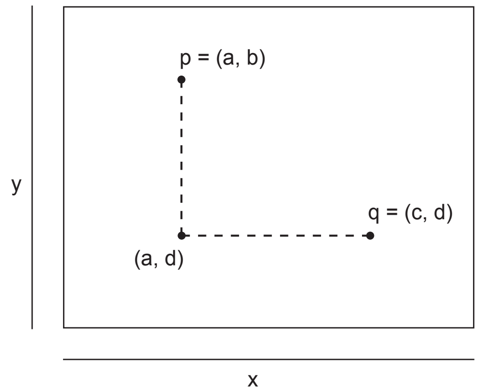
A dotyczy to zarówno całej płaszczyzny, jak i płaszczyzny pozbawionej mniej niż continuum punktów. Dotyczy to, oczywiście, przestrzeni euklidesowych każdego wymiaru wyższego niż 1.

O spójności przestrzeni euklidesowych wymiarów wyższych niż 1 można przekonać się też na inny sposób, widząc je jako produkty prostych.

Spójność a produktowanie

W produkcie $X \times Y$ podzbiory postaci $\{x\} \times Y$ mają tę samą topologię co Y — to samo dotyczy podzbiorów postaci $X \times \{y\}$ i przestrzeni X. Stąd jeśli obie przestrzenie są spójne, to i wspomniane ich podzbiory są spójne.

T w i e r d z e n i e. *Produkt przestrzeni spójnych jest spójny.*



Rys. 17. Spójność produktu

D o w ó d. Niech $p = (a, b)$ i $q = (c, d)$ będą dowolnymi punktami produktu $X \times Y$ przestrzeni spójnych X i Y. Zbiór $\{a\} \times Y \cup X \times \{d\}$, jako suma zbiorów spójnych mających punkt wspólny $\{a, d\}$, jest spójny. Punkty p i q należą do tego pod zbioru. Stąd, wobec dowolności punktów, spójność produktu.

Przez indukcję wnioskujemy:

Produkt skończonej ilości przestrzeni spójnych jest spójny.

Biorąc pod uwagę, że prosta i odcinki są spójne, wnioskujemy, że *płaszczyzna i wszelkie przestrzenie euklidesowe są spójne; spójny jest kwadrat płaski i wszelkie kostki euklidesowe.*

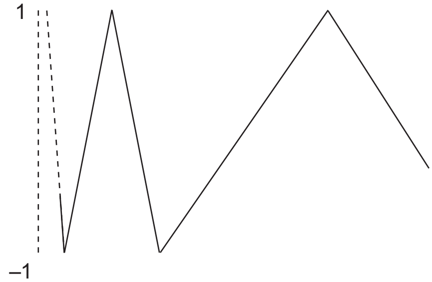
Ważną rolę w wielu dalszych stwierdzeniach będzie miało

T w i e r d z e n i e. *Przestrzeń zawierająca podzbiór gęsty spójny jest spójna.*

D o w ó d: Niech D będzie podzbiorem gęstym i spójnym przestrzeni X. Niech U będzie zbiorem niepustym, domknięto-otwartym w X. Zbiór $D \cap U$ jest podzbiorem d.-o. zbioru D i jest niepusty, bo D jest gęste w X. Ze spójności zbioru D wynika, że $D \cap U = D$, zatem U zawiera A. Z domkniętości zbioru U wynika teraz, że U zawiera clD. Ale $\mathrm{cl}D = X$, bo D jest gęste w X. Stąd $U = X$, co, wobec dowolności U, dowodzi spójności X.

W szczególności, *każdy zbiór zawarty między zbiorem spójnym zbioru a jego domknięciem jest spójny.* W szczególności, *domknięcie zbioru spójnego jest spójne.*

Półprosta $[0, \infty)$ jest spójna. Spójny jest więc obraz półprostej, położony tak jak na rysunku niżej, a także jego domknięcie, tworzące zbiór nazywany s i n u s o i d ą z a g ę s z c z o n ą, która może być też widziana jako domknięcie łamanej nieskończonej takiej, jak na tym samym rysunku obok.



Rys. 18. Sinusoida zagęszczona $y = \sin \frac{1}{x}$

Twierdzenie o spójności produktów przeniesiemy teraz na produkty ogólne.

Produkt dowolnej ilości przestrzeni spójnych jest przestrzenią spójną[37].

Dowód. Niech X będzie produktem pewnego ogółu przestrzeni, który oznaczamy przez M. Ustalmy punkt p w produkcie X. Rozważmy wszelkie produkty podogółów skończonych przechodzące przez ten punkt, mając na myśli zbiory X_s określone dla każdego podzbioru skończonego S zbioru M w następujący sposób: do zbioru X_s należą te punkty x produktu X, których współrzędne są równe współrzędnym punktu p, jeśli nie jest to współrzędna zbioru z S. Przestrzenie X_s (z topologią dziedziczoną z X) są w oczywisty sposób homeomorficzne z produktem przestrzeni podogółu S. Przestrzenie X_s są więc spójne, na mocy poprzedniego twierdzenia.

Dla rozważanego ustalonego p weźmy pod uwagę sumę wszystkich przestrzeni X_s po wszystkich S dotąd rozważanych. Przestrzenie X_s mają wspólny punkt p. Ich suma jest zatem spójna.

Dowód będzie zakończony, kiedy pokażemy, że suma zbiorów X_s po wszystkich S jest gęsta w X. Weźmy w tym celu dowolny zbiór z bazy produktu, tj. zbiór wyznaczony przez układ skończony zbiorów otwartych U_i w przestrzeniach X_i rozważanego ogółu, złożony z tych punktów x produktu X, których i-te współrzędne należą do U_i. Jeśli do S nie należy żadna z przestrzeni X_i, to zbiór X_s przecina się z rozważanym zbiorem z bazy. Gęstość sumy zbiorów X_s jest w ten sposób dowiedziona, gdyż kolekcja skończona S spośród rozważanego ogółu przestrzeni omijająca wzięte pod uwagę przestrzenie X_i zawsze się znajdzie, jeśli ogół M jest nieskończony (jedynie ten przypadek wymagał dodatkowego rozumowania).

O kontinuach

Przestrzenie zwarte i spójne nazywane są *kontinuami*. Odcinek, kwadrat i kostki domknięte przestrzeni euklidesowych, ale też i sinusoida zagęszczona, są kontinuami. Kontinuom będzie poświęcona istotna część kolejnych wykładów. Na razie udowodnimy jedno twierdzenie w sformułowaniu — ze względu na dalsze cele — możliwie ogólnym.

[37] Czytelnik, niezainteresowany na razie produktami ogólnymi, może odłożyć czytanie dowodu tego twierdzenia, którego potrzeba nie pojawi przed *Wykładem VI.*

Twierdzenie[38]. *Jeśli rodzina podzbiorów domkniętych niepustych przestrzeni zwartej ma tę własność, że każda jej podrodzina skończona zawiera w przekroju kontinuum należące do tej rodziny zbiorów, to przekrój wszystkich zbiorów rozważanej rodziny zbiorów jest kontinuum.*

Dowód. Niech X będzie przestrzenią, której podzbiory rozważamy. Przypuśćmy, że przekrój zbiorów, spełniających założenia twierdzenia, nie jest spójny. Jest zatem sumą zbiorów A i B domkniętych, niepustych i rozłącznych. Wobec normalności przestrzeni X (wynikającej, wobec zwartości, z własności T_2) istnieją zbiory U i V, otwarte i rozłączne, takie, że U zawiera A i V zawiera B.

Oczywiście, przekrój rozważanych zbiorów zawiera się w sumie W zbiorów U i V. Wykażemy, że wśród zbiorów rozważanej rodziny znajdzie się skończenie wiele takich, których przekrój zawarty jest w W.

Istotnie, jeśliby tak nie było, to przekroje skończone C zbiorów rozważanej rodziny wystawałyby wszystkie poza W. Mielibyśmy poza zbiorem W, a więc na zbiorze zwartym, rodzinę scentrowaną podzbiorów domkniętych zbiorów $C—W$. Znaczyłoby to, że przekrój wszystkich zbiorów C ma punkty poza W. Sprzeczność z przyjętym założeniem, że przekrój ten jest zawarty w W.

Weźmy więc skończenie wiele zbiorów z rozważanej rodziny zbiorów, których przekrój C jest zawarty w W. Wobec założenia, przekrój C zawiera pewne kontinuum K należące do rozważanej rodziny zbiorów. Oczywiście, K zawiera przekrój wszystkich zbiorów rozważanej rodziny, a więc ma punkty w każdym ze zbiorów A i B. Ale $A \in U$ i $B \in V$. Zatem kontinuum K, które jest zawarte w sumie W zbiorów U i V, ma punkty w obu tych zbiorach, otwartych i rozłącznych. Sprzeczność.

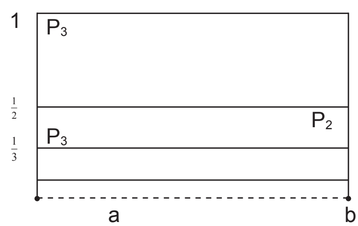
W szczególności,

Przekrój rodziny zstępującej kontinuów jest kontinuum.

Dotyczy to w szczególności ciągów zstępujących kontinuów. Ten przypadek szczególny będzie ważny dla dalszych rozważań. Już bardzo proste figury płaskie mogą tworzyć ciągi zstępujące dające w przekroju kontinua o dużej osobliwości, np. takie jak sinusoida zagęszczona (to akurat nietrudno zauważyć).

Twierdzenie nie przenosi się na zbiory spójne dowolne, jeśli nie założyć zwartości.

Przykład. Rozważmy kwadrat płaski jednostkowy $[0, 1] \times [0, 1]$, z którego usunięto jeden z boków, pozostawiając wszakże jego końce; niech będzie to bok $y = 0$ bez dwóch punktów $x = 0$ i $x = 1$ — p. rys. 19. Ciąg zstępujący „prostokątów" $y \leqslant \frac{1}{n}$ ma przekrój niespójny, złożony z dwóch punktów osi x-ów.



Rys. 19. Przykład ciągu zastępcującego prostokąt o przekroju niespójnym (zbiór dwuelementowy {a, b}).

[38] F. Riesz: *Atti del IV Congresso Internationale dei Matematici*. Roma 1908; cytowane za Kerékjártó.

Założenia T_2 również nie można zaniedbać, na co są nietrudne przykłady przestrzeni nieskończonych, w których jedynymi zbiorami otwartymi są dopełnienia zbiorów skończonych.

Moc zbiorów spójnych

Zaczniemy od stwierdzenia oczywistego

Przestrzenie metryczne spójne wielopunktowe mają moc nie mniejszą niż continuum.

Jest tak, bo jeśli a i b są dwoma punktami przestrzeni metrycznej spójnej, to dla każdego r mniejszego od odległości od a do b istnieje punkt tej przestrzeni odległy o r od punktu a (inaczej przestrzeń rozpadłaby się na dwa zbiory otwarte niepuste: jeden złożony z punktów, których odległość od a jest $< r$, i drugi złożony z punktów, których odległość od a jest $> r$).

Ale dla uzyskania tej konkluzji wystarczyłoby istnienie odwzorowania ciągłego przestrzeni w prostą, różnego od odwzorowania *constans*, a więc założenia, że przestrzeń jest *całkowicie regularna*[39]. Istotnie, jeśli przestrzeń spójna X ma odwzorowanie ciągłe w prostą, którego wartość w jednym punkcie jest a, a w drugim b, i te wartości są różne, to obraz przestrzeni X wobec jej spójności zawiera odcinek [a, b] prostej. Moc przestrzeni X nie może być wtedy mniejsza od mocy tego odcinka, tj. nie może być mniejsza niż moc *continuum*.

Odnotujmy zatem,

Twierdzenie. *Przestrzenie całkowicie regularne spójne wielopunktowe mają moc co najmniej continuum.*

To, że przestrzenie metryczne są całkowicie regularne, można by wydostać z uwagi poczynionej na wstępie, ale do kanonu topologii należą stwierdzenia dalej idące, zapoczątkowane lematem Urysohna. Lemat Urysohna (1925) zapewnia w zakresie przestrzeni normalnych, ogólniejszych niż metryczne, istnienie dla każdej pary podzbiorów domkniętych rozłącznych przestrzeni odzorowania ciągłego o wartościach rzeczywistych określonego na całej przestrzeni, przyjmujących na tych zbiorach różne od siebie stałe wartości. Warunek wymagany dla całkowitej regularności jest tym objęty, jeśli przyjąć, że jeden z tych zbiorów domkniętych jest jednopunktowy. Naturalny dowód stwierdzenia, że przestrzenie metryczne są normalne można znaleźć w książce Aleksandrowa (1977), s. 106.

O przestrzeniach regularnych możemy na razie tyle powiedzieć, że jeśli są spójne, to nie mogą być przeliczalne. Wynika to stąd, że przestrzenie regularne przeliczalne są normalne, a zatem całkowicie regularne[40].

---

[39] Przestrzeń nazywana jest *całkowicie regularną*, jeśli dla dowolnego jej punktu i dowolnego otoczenia tego punktu daje się na tej przestrzeni określić funkcję ciągłą o wartościach rzeczywistych, która znika w tym punkcie, a poza wspomnianym otoczeniem ma wartości nie mniejsze niż 1.

[40] Dowód można znaleźć u R. Engelkinga w *Topologii ogólnej II*, s. 60; dodajmy: w skład

Dodajmy wszakże, że przestrzenie regularne wielopunktowe spójne mocy mniejszej niż continuum są możliwe. Oczywiście, na tych przestrzeniach każda funkcja ciągła o wartościach rzeczywistych jest *constans*, a przykłady (nie tylko z mocą mniejszą niż *continuum*) pochodzą od I.L. Rauchwarger (1945) i E. Hewitta (1946)[41]. Na możliwość istnienia przestrzeni topologicznych, na których nie ma funkcji ciągłych rzeczywistych innych niż stałe, zwrócił uwagę Maurice Frechet. Problemem zajął się Urysohn, pokazując swym słynnym lematem, że przestrzenie normalne są wolne od tej anomalii, zapytując, czy jest tak dla przestrzeni regularnych.

Jeśli topologia na zbiorze jest spójna i spełnia warunek T_1, to zbiór ten nie może być skończony, chyba że jest jednopunktowy. Ale są topologie spójne T_0 na zbiorach skończonych — jedną z nich jest znana już nam topologia na zbiorze dwuelementowym. Mają one dla podstaw topologii istotne znaczenie[42].

Są wszakże, jak pokazał Urysohn, przestrzenie T_2 spójne przeliczalne[43].

Ograniczymy się tu do podania nowszego przykładu pochodzącego od R.H. Binga[44].

Przykład Binga

Niech X będzie zbiorem punktów płaszczyzny o obu współrzędnych wymiernych. Rozważmy kierunek k taki, że proste o tym kierunku przecinają zbiór X w co najwyżej jednym punkcie. Istnienie takiego kierunku jest oczywiste, jeśli wziąć pod uwagę, że podane wymagania eliminują jedynie przeliczalnie wiele kierunków.

Dla ustalonego punktu p zbioru X rozważmy przedział U osi x-ów wokół punktu przecięcia jej przez prostą o kierunku k przechodzącą przez punkt p. Wspomniany punkt osi x-ów należy do zbioru X jedynie wtedy, gdy sam punkt p leży na osi x; jest z nim wtedy identyczny. Wraz z przedziałem U rozważmy zbiór $< p, U > = \{p\} \cup (U \cap X)$ oraz zbiór $< U >$, nazywany dalej pasem, złożony z punktów zbioru X leżących na prostych o kierunku k przechodzących przez U (na każdej prostej o kierunku k jest co najwyżej jeden taki punkt).

pojęcia regularności wchodzi warunek T_1 zapewniający domkniętość zbiorów jednopunktowych.

41 I.L. Rauchwarger: *Uczonyje Zapiski MGU*. T. 4 — cytat za *Tudami* P.S. Urysohna (por. następna nota) T. 1, s. 215, E. Hewitt: *On two problems of Urysohn*. Ann. of Math. 47 (1846), s. 503—509.

42 A. Kurosch: *Kombinatorischer Aufbau der bikompakten topologische Räume*. Comp. Math. 2 (1935), s. 471—476; P.S. Aleksandrow: *O poniatji prostranstwa w topologii*. Usp. mat. nauk 2 (17) (1947), s. 5—57. Por. także pracę J.P. Thomasa: *Maximal connected topological spaces*. J. Australian Math. Soc. 8 (1968), s. 700—705.

43 P.S. Urysohn, *Über die Machtigkeit der zusammenhangenden Mengen*. Math. Ann. 94 (1925), 262—295; *Trudy po topołogii i drugim obłast'jam matiematiki*. Moskowa—Leningrad 1951, t. I, s. 177—218; tamże — w aneksie III, s. 208 — słynny lemat.

44 R.H. Bing: *A countable connected Hausdorff space*. Proc. Amer. Math. Soc. 4 (1953), s. 474.

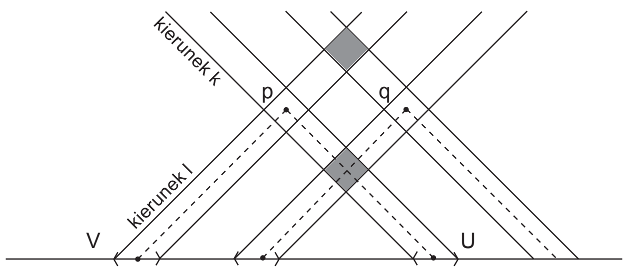
Niech l będzie innym kierunkiem o opisanych wyżej własnościach takim, że proste o tym kierunku przechodzące przez punkt zbioru X nie spotykają się na osi x-ów z prostymi o kierunku k, chyba że jest to punkt zbioru X leżący na osi x-ów (istnienie takiego kierunku jest oczywiste: nowe wymagania eliminują jedynie przeliczalnie wiele kierunków). Rozważmy dla punktu p analogiczne do poprzednich zbiory $< p, V >$ i pasy $< V >$ związane z kierunkiem l.

Rozważmy na zbiorze X topologię generowaną przez zbiory $< p, U, V > = < p, U > \cup <p, V >$. Oś x-ów dziedziczy z niej zwyczajną topologię liczb wymiernych. Punkt p spoza osi x-ów jest jedynym punktem spoza tej osi leżącym w zbiorze $< p, U, V >$, stąd na dopełnieniu osi x-ów topologia jest dyskretna.

Otoczenia punktów p, generujące opisaną topologię, leżą w sumach skrzyżowanych w p pasów $< U >$ i $< V >$, pokazanych na rys. 20, jednego o kierunku k i drugiego o kierunku l. Suma wspomnianych skrzyżowanych pasów jest, co nietrudno zauważyć, domknięciem otoczenia $< p, U, V >$.

Określona w ten sposób przestrzeń X jest sumą rozłącznych z sobą przestrzeni przeliczalnych, dyskretnej, złożonej z punktów spoza osi x-ów, i przestrzeni w sobie gęstej liczb wymiernych osi x-ów, gęstej w przestrzeni i otwartej[45].

Mając dwa różne od siebie punkty p i q zbioru X (nie mogą one leżeć na żadnej z prostych, ani o kierunku k, ani o kierunku l), nietrudno spostrzec ich otoczenia rozłączne. Stąd topologia spełnia warunek T_2.



Rys. 20. Przestrzeń Binga

Tymczasem domknięcia tych otoczeń (będące sumami wspomnianych wcześniej skrzyżowanych pasów) przecinają się, będąc zbiorami punktów z X leżących w równoległobokach (zacieniowanych na rys. 20 — nie tych, w których leżą punkty p i q). Stąd spójność przestrzeni X.

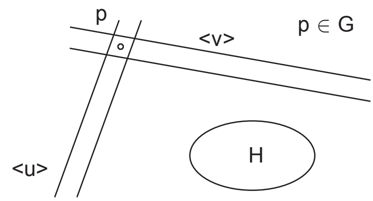
Dowiedliśmy w istocie więcej.

Niech bowiem G i H będą podzbiorami otwartymi, niepustymi, rozłącznymi przestrzeni X. Niech $p \in G$ i niech $< p, U, V >$ będzie otoczeniem punktu p zawartym w G. Domknięcie tego otoczenia, tj. suma dwu krzyżujących się z sobą pasów U i V, omija zbiór H — por. rys. 21. Podobnie, zbiór G jest omijany przez inną parę pasów. Przecięcie tych dwu skrzyżowanych par pasów widzimy

[45] Jeśli rozważany byłby tylko jeden kierunek, byłaby to topologia będąca w analogii do topologii podwojonego okręgu Aleksandrowa, por. R. Engelking (1995), s. 157.

w postaci pary dwu rozłącznych z sobą równoległoboków (takich jak na rys. 20). Dopełnienie sumy zbiorów G i H jest więc niepuste.

Jest to coś więcej niż spójność, bo znaczy to, że każde dwa zbiory otwarte niepuste rozłączne odzielone są od siebie zbiorami odpowiednio dużymi, w tym przypadku sumą dwóch „równoległoboków", a więc zbiorami nieskończonymi. Wynika stąd w szczególności, że przestrzeń Binga nie jest rozspajana przez zbiory skończone, tym samym przez punkty.

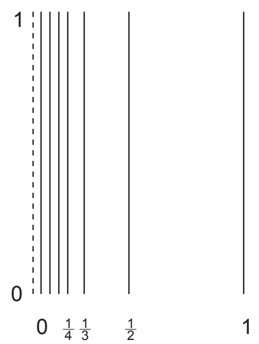


Rys. 21. Zbiór <p, U, V>, p ∈ G, omija H

Mimo to stopień spójności nie jest duży. Przestrzeń Binga może być rozspojona przez podzbiór dyskretny, np. przez zbiór jej punktów leżących poza osią x-ów (dopełnieniem tego zbioru jest zbiór liczb wymiernych osi x-ów, w oczywisty sposób niespójny).

Składowe i quasi-składowe

Sumę wszystkich podzbiorów spójnych, do których należy dany punkt x nazywamy *składową (tego) punktu*. Składowa punktu jest więc największym zbiorem spójnym, do którego należy punkt. Jeśli S jest składową punktu x, to S jest składową każdego swego punktu. Składowe są rozłączne, jeśli nie są równe. Zbiór wszystkich składowych punktów przestrzeni stanowi rozbicie przestrzeni na jej maksymalne podzbiory spójne. To pozwala nam nazwać składowe punktów *składowymi przestrzeni*.



Rys. 22. Przykład ilustrujący pojęcie składowej: wiązka odcinków jednostkowych nad punktami 0 i $1/n$, $n = 1, 2,...$ z topologią dziedziczoną z płaszczyzny. Składowymi są odcinki wiązki

Ponieważ domknięcia zbiorów spójnych są spójne, zatem

Składowe są zbiorami domkniętymi.

Przez *quasi-składową punktu* nazywamy przekrój wszystkich zbiorów d.-o., do których ten punkt należy. Quasi-składowa punktu jest zbiorem domkniętym, zawiera składową tego punktu (bo składowa jest zbiorem spójnym i każdy zbiór d.-o., do którego ten punkt należy, musi ją zawierać), ale nie musi być jej równa; jeśli tak jest, nie jest spójna.

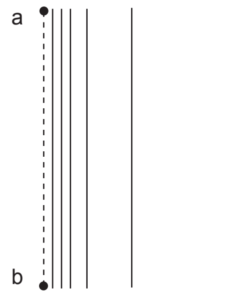
W zbiorze płaskim takim jak na rys. 9, pozostawmy z odcinka nad punktem 0 dwa punkty a i b — por. rys. 23. Składową punktu a jest zbiór jednopunktowy $\{a\}$. Quasi-składową punktu a jest zbiór dwupunktowy $\{a, b\}$.

Oczywiście,

Jeśli quasi-składowa punktu jest spójna, to jest składową tego punktu.

Dopełnienia zbiorów d.-o. są d.-o. Zatem,

Quasi-składowa punktu jest quasi-składową każdego swego punktu.



Rys. 23. Quasi-składowa

Nazwijmy więc składowe punktów *składowymi przestrzeni*. Quasi-składowe są rozłączne, jeśli nie są równe.

Quasi-składowe stanowią rozbicie przestrzeni na zbiory domknięte, na ogół grubsze od rozbicia na składowe, drobniejsze od każdego rozbicia przestrzeni na zbiory d.-o.

W zakresie przestrzeni zwartych T_2 różnica między składowymi a quasi-składowymi znika. Wynika to stąd, że

Quasi-składowe przestrzeni zwartej T_2 są zbiorami spójnymi.

D o w ó d. Niech Q będzie quasi-składową przestrzeni X zwartej T_2. Przypuśćmy, że Q rozpada się na zbiory (niepuste) A i B, domknięte w Q i rozłączne. Ponieważ quasi-składowa jest podzbiorem domkniętym przestrzeni X, zbiory A i B są również domknięte w X.

Niech U i V będą zbiorami otwartymi w X, rozłącznymi i takimi, że $A \subset U$ i $B \in V$ (przestrzeń X jest, jako przestrzeń zwarta T_2, przestrzenią normalną).

Niech W będzie zbiorem d.-o. zawartym w $U \cup V$ i zawierającym Q, którego istnienie nietrudno wykazać, wykorzystując zwartość X. Quasi-składowa Q jest quasi-składową któregoś ze swych punktów. Niech ten punkt, nazwijmy go a, należy do części A quasi-składowej Q. Punkt a należy do zbioru $W \cap U$, który jest zbiorem d.-o. (domkniętość zbioru wynika z tego, że jego dopełnienie jest równe zbiorowi otwartemu $W \cap V$). Zatem quasi-składowa Q zawiera się w U. Stąd B jest zbiorem pustym, wbrew założeniu.

Dwa ostatnie twierdzenia dają w rezultacie.

Twierdzenie. *Składowe przestrzeni zwartych T_2 są równe quasi-składowym.*

Przestrzeń nazywamy *dziedzicznie niespójną*, jeśli jedynymi jej podzbiorami spójnymi niepustymi dziedziczącymi z niej topologię spójną są podzbiory jednopunktowe, lub, co na jedno wychodzi, jeśli jej składowe są jednopunktowe.

Przestrzenie dyskretne, zbiór Cantora, zbiór liczb wymiernych, zbiór liczb niewymiernych, prosta Sorgenfreya to przykłady przestrzeni dziedzicznie niespójnych.

Jeśli quasi-składowe wszystkich punktów są jednopunktowe, to przestrzeń nazwiemy *całkowicie niespójną*. Ponieważ składowe zawierają się w quasi-składowych, przestrzenie całkowicie niespójne są dziedzicznie niespójne. Różnica między tymi rodzajami przestrzeni znika w zakresie przestrzeni zwartych T_2, gdzie, jak wiemy, składowe i quasi-składowe są jednym i tym samym.

Podobnie jest w zakresie przestrzeni uporządkowanych: składowe są równe quasi-składowym (dowód pomijamy), więc i w tym zakresie nie ma różnicy między dziedziczną niespójnością a całkowitą niespójnością.

Przestrzenie całkowicie niespójne są przestrzeniami T_2.

Istotnie, mając punkty x i y, mamy (na mocy całkowitej niespójności) zbiór d.-o., do którego należy punkt x, ale nie punkt y. Ten zbiór i jego dopełnienie są zbiorami otwartymi oddzielającymi punkty x i y w sensie warunku T_2.

Zarówno zbiór liczb wymiernych, jak i zbiór liczb niewymiernych są podzbiorami gęstymi przestrzeni spójnych T_2, tzn. dają się uspójnić. Oczywiście, nie można tego zrobić w przypadku zbioru Cantora (wobec jego zwartości). Nieoczywiste jest wszakże, czy można uspójnić prostą Sorgenfreya. A. Emeryk i W. Kulpa dowiedli, że prosta Sorgenfreya ma uspójnienie klasy T_2, nie ma wszakże uspójnienia regularnego[46].

Przestrzenie dziedzicznie niespójnie są przestrzeniami T_1, co wynika stąd, że zbiory jednopunktowe, będąc składowymi, są domknięte.

Jest jeszcze jeden rodzaj przestrzeni o dużym stopniu niespójności: *przestrzenie mające bazy zbiorów domknięto-otwartych*. Ich porównanie z poprzednimi dwoma zacznijmy od następującej uwagi.

Przestrzenie z bazą d.-o. mogą nie spełniać żadnych warunków oddzielania, ale jeśli już spełniają warunek T_0, to spełniają warunek T_2. Istotnie, mając dwa punkty, mamy, na mocy warunku T_0, zbiór otwarty U, do którego należy jeden z punktów, a drugi nie. Ten z punktów, który należy do U, ma otoczenie domknięto-otwarte V zawarte w U. Zbiór V i jego dopełnienie, są zbiorami otwartymi oddzielającymi rozważane punkty w sensie warunku T_2.

Z tej uwagi wynika bezpośrednio, że *przestrzenie z bazą d.-o. są całkowicie niespójne, jeśli są* T_0.

Żadne z odnotowanych dotąd wynikań:

(12) T_0 *i istnienie bazy d.-o.* $\Rightarrow$ *całkowita niespójność* $\Rightarrow$ *dziedziczna niespójność*,

nie daje się odwrócić nawet w zakresie podzbiorów płaszczyzny. Odpowiednie przykłady znajdą się w *Wykładzie IV*, por. s. 59, 60. Najdawniejsze pochodzą od W. Sierpińskiego[47].

---

[46] A. Emeryk, W. Kulpa: *The Sorgenfrey line has no connected compactification*. Commentationes Math. Univ. Carolinae 18 (1977), s. 483—487. Późniejsze rezultaty: W.S. Watson, R.G. Wilson: *Embedding in connected spaces*. Houston J. Math. 19 (1993), s. 469—481.

[47] W. Sierpiński: *Sur les ensembles connexes and non connexes*. Fund. Math. 2 (1921), s. 81—95. Przykładem na nieodwracalność pierwszego z wynikań jest również przykład P. Erdosa (1940), podzbioru przestrzeni Hilberta złożonego z punktów o samych współrzędnych wymiernych; por. R. Engelking: *Theory of dimension. Finite and infinite*. 1995, s. 12.

Zwiększanie topologii a spójność

Przy zwiększaniu topologii spójność nie ogół się nie zachowuje, ale dołączenie do topologii podzbioru gęstego nie wpływa na spójność.

Twierdzenie. *Jeśli topologia T na zbiorze X jest spójna i D jest gęste w X w sensie tej topologii, to topologia generowana przez $T \cup \{D\}$ jest spójna.*

Dowód. Przypuśćmy, że $X = U \cup V$, gdzie zbiory U i V są otwarte w topologii $T \cup \{D\}$, niepuste i rozłączne. Zbiory U i V są sumami zbiorów z bazy topologii $T \cup \{D\}$, tj. sumami zbiorów postaci $W \cap D$, gdzie W jest zbiorem otwartym topologii T.

Zauważmy, że jeśli $G = W' \cap D$ i $H = W'' \cap D$, gdzie W' i W'' należą do T, to z $G \cap H =$ wynika $W' \cap W'' =$, wobec gęstości (w topologii T) zbioru D. A zatem suma zbiorów W pojawiających się w zapisach zbiorów z bazy, składających się na zbiór U, i suma zbiorów W pojawiających się w zapisach zbiorów z bazy, składających się na zbiór V, stanowią parę zbiorów rozłącznych, otwartych w topologii T, dających w sumie X. Przeczy to spójności topologii T.

Przez topologię *spójną maksymalną* rozumie się topologię spójną, która jakkolwiek zwiększona przestaje być spójna. Z dowiedzionego stwierdzenia wynika, że

W topologii spójnej maksymalnej zbiory gęste są otwarte.

Uwaga. Tego rodzaju topologie nie mogą być wszakże metryczne: w przestrzeni metrycznej bez punktów izolowanych zawsze można zbudować za pomocą pewnika wyboru dwa podzbiory gęste rozłączne, nie otwarte. Uznanie jednego z nich za otwarty, zwiększa topologię, nie naruszając jej spójności.

Twierdzenie odwrotne jest fałszywe. Odpowiednią przestrzeń spójną T_2 zbudował I. Baggs (1974)[48].

Topologia prostej daje się zwiększyć do spójnej maksymalnej[49]. Nie wykluczałoby to istnienia zwiększeń topologii prostej, które nie mają zwiększenia do topologii spójnej maksymalnej (por. na ten temat zamieszczoną niżej uwagę o topologii gęstościowej).

Topologia spójna pozostanie spójną, jeśli ją zwiększyć tak, by wszystkie zbiory gęste stały się otwarte[50]. Każdą topologię spójną można zwiększyć do topologii spójnej, w której zbiory gęste są otwarte[51].

---

[48] I. Baggs: *A connected Hausdorff space which is not contained in a maximal connected space*. Pacific J. Math. 51 (1974), s. 11—18.

[49] P. Simon: *An example of maximal connected Hausdorff space*. Fund. Math. 100 (1978), s. 157—163; J.A. Guthrie, H.E. Stone, M. Wage: *Maximal connected expansion of the reals*. Proc. AMS 69 (1978), s. 159—166.

[50] Douglas D. Anderson: *On irresolvable Hausdorff spaces*. Proc. Amer. Math. Soc. 16 (1965), s. 463—465.

[51] J.A. Guthrie, D.F. Reynolds, H.E. Stone: *Connected expansions of topologies*. Bull Australian Math. Soc. 9 (1973), s. 259—265.

Istnieją topologie spójne T_2 (nawet metryczne)[52], których nie można zwiększyć do spójnej maksymalnej.

Stąd, wobec poprzedniej uwagi, istnieją topologie spójne T_2 (a więc nieskończone), w których zbiory gęste są otwarte, a które nie są spójnymi maksymalnymi. Ciekawe są pod tym względem topologie spójne T_0 na zbiorach skończonych[53].

Topologia gęstościowa

Znane jest zwiększenie topologii prostej motywowane problemami teorii miary. Polega na dołączeniu do topologii prostej zbiorów jednorodnych w sensie miary, tj. zbiorów mierzalnych, których wszystkie punkty są ich punktami gęstości, tj. punktami, dla których udział miary zbioru w przedziałach otaczających punkty dąży do 1, jeśli długości przedziałów dążą do zera. Idea topologii gęstościowej pochodzi od N. Łuzina i D. Mienszowa[54].

Od dawna wiadomo, ale rzecz jest nieoczywista, że

Topologia gęstościowa jest całkowicie regularna[55].

Wszakże,

Topologia gęstościowa nie jest normalna[56].

Dla dowodu zauważmy, że zbiory miary zero są zbiorami domkniętymi topologii gęstościowej. Weźmy więc pod uwagę dwa zbiory miary zero, gęste i rozłączne z sobą. Funkcja rzeczywista jest równa 0 na jednym i równa 1 na drugim z tych zbiorów — w zwykłej topologii nie ma punktów ciągłości. Normalność topologii gęstościowej implikowałaby istnienie funkcji ciągłej w topologii gęstościowej, a więc funkcji aproksymatywnie ciągłej, równej 0 na jednym i równej 1 na drugim ze wspomnianych zbiorów gęstych, a więc istnienie funkcji aproksymatywnie ciągłej nigdzie nieciągłej. Sprzeczność.

---

52 J.A. Guthrie, H.E. Stone: *Spaces whose connected expansions preserve connected subsebsets*. Fund. Math 80 (1973), s. 91—100; I. Baggs: *A connected Hausdorff space which is not contained in a meximal connected space*. Pacific J. Math. 51 (1974), s. 11—18.

53 J. Pelham Thomas: *Maximal connected topologies*. J. Australian Math. Soc. 8 (1967), s. 700—705.

54 P. uwaga w następnym odnośniku. Na temat topologii gęstościowej por. uwagi w książkach J. Oxtoby'ego: *Measure and category*. Springer 1971 oraz A.B. Kharazishwiliego: *Nonmeasurable sets and functions*. Elsevier 2004; zob. także pracę F.D. Talla: *The density topology*. Pacitic J.M. 62 (1976), s. 275—284.

55 Twierdzenie Bogomołowej (1924), nazywane także twierdzeniem Łuzina—Mieńszowa, zapewniające istnienie odpowiedniej dla potwierdzenia tej własności funkcji aproksymatywnie ciągłej. Znaczenie tego twierdzenia w teorii funkcji rzeczywistych uwidoczniły prace Z. Zahorskiego (1941, 1950); por. ich przegląd autorstwa J.S. Lipińskiego w tomie poświęconym Zygmuntowi Zahorskiemu, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej 48 (1986), s. 29—38. Samo twierdzenie jest w analogii do podstawowego dla topologii mnogościowej lematu Urysohna; por. na ten temat artykuł autora *Lemat Urysohna czy twierdzenie Łuzina—Mieńszowa*. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej. Mat.—Fiz. 76 (1996), s. 141—150.

56 C. Goffman, D. Waterman: *Approximately continuous transformations*. Proc. Amer. Math. Soc. 12 (1961), s. 116—121.

Topologia gęstościowa jest spójna.

Dla dowodu rozważmy rozbicie prostej na dwa zbiory otwarte topologii gęstościowej. Niech U będzie jednym z nich. Gęstość zbioru U w punkcie x jest pochodną z funkcji $\mu(U \cap [a, x))$, i gdzie μ jest symbolem miary Lebesgue'a, a a jest ustalonym punktem na prostej. W rozważanej sytuacji gęstość zbioru U przyjmowałaby dwie i tylko dwie wartości, 0 i 1, co przeczy własności Darboux, którą mają pochodne.

Topologia gęstościowa spełnia warunek Suslina.

Istotnie, zbiory otwarte niepuste topologii gęstościwej zawierają zbiory mierzalne o mierze dodatniej, zatem — jeśli są rozłączne — może ich być co najwyżej przeliczalnie wiele.

Topologia gęstościowa nie jest ośrodkowa.

Wynika to ze spostrzeżenia, że zbiory przeliczalne są w niej domknięte.

Topologia gęstościowa nie jest porządkowalna.

Istotnie, jeśliby była porządkowalna, to — co wiemy z *Wykładu II* — byłaby normalna, co jak wcześniej pokazaliśmy nie jest prawdą.

Topologia gęstościowa nie jest topologią spójną maksymalną.

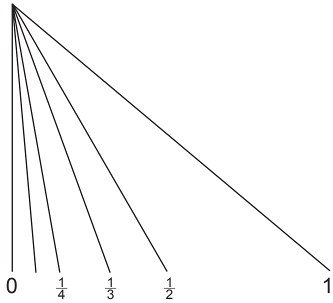
Na temat dowodu por. wskazówkę w *Wykładzie III* (przyp. 66). Czy jednak mogłaby być zwiększona do spójnej maksymalnej, nie wiemy.

Lokalna spójność

Przestrzeń nazywamy *lokalnie spójną w punkcie p*, jeśli w każdym otoczeniu U punktu p zawarte jest otoczenie V punktu p, które jest spójne. Nie wymaga się, aby otoczenie V było otwarte. Nie wymaga się, by sama przestrzeń była spójna.

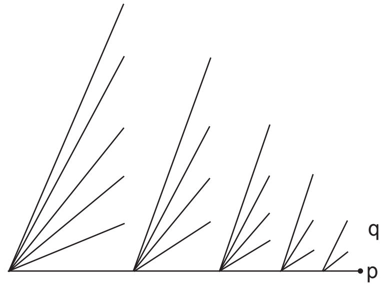
Prosta i, ogólniej, wszelkie przestrzenie euklidesowe E^n są lokalnie spójne w każdym punkcie; są one nawet w każdym punkcie lokalnie E^n. Odcinek, kostki euklidesowe, kostka Hilberta i kostki Tichonowa są również lokalnie spójne w każdym punkcie. Zbiór Cantora nie jest lokalnie spójny w żadnym punkcie, ale np. przestrzenie dyskretne są lokalnie spójne w każdym punkcie.

Miotełka nad zbiorem Cantora jest lokalnie spójna jedynie w wierzchołku. Miotełka nad ciągiem zbieżnym (rys. 24); jest lokalnie spójna w wierzchołku, nie jest lokalnie spójna w pozostałych punktach odcinka zagęszczenia, w pozostałych punktach jest lokalnie spójna. Podobnie jest dla sinusoidy zagęszczonej, która nie jest lokalnie spójna w punktach odcinka zagęszczenia, oraz dla wiązki odcinków nad ciągiem zbieżnym.



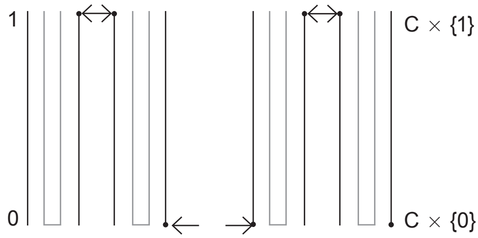
Rys. 24. Miotełka nad ciągiem zbieżnym

Są punkty lokalnej spójności, których dostatecznie małe ich otoczenia nie zawierają otoczeń spójnych *otwartych*. Przykładem jest punkt p w kontinuum przedstawionym na rys. 25, będącym sumą ciągu miotełek skupiających się do punktu p (J.G. Hocking, G.S. Young, *Topology...*, s. 113). Kontinuum to ma punkty, w których nie jest lokalnie spójne. Jeśli wszystkie punkty przestrzeni są punktami spójności, to — jak zobaczymy — anomalia ta się nie pojawia.



Rys. 25. Punkt p nie ma dowolnie małych otoczeń otwartych spójnych

Wiązka Cantora — tj. produkt zbioru Cantora C przez odcinek [0, 1] — rys. 26 — nie jest lokalnie spójna w żadnym punkcie. Redukując do punktów niektóre pary jej punktów — np. pary wskazane na rysunku 26 — dostaje się kontinua — nadal płaskie — nigdzie nie lokalnie spójne.



Rys. 26. Wiązka Cantora i zbudowane z niej kontinuum nigdzie nie lokalnie spójne

Przestrzenie lokalnie spójne

Przestrzeń nazwiemy *lokalnie spójną*, jeśli jest lokalnie spójna w każdym punkcie. Budowę przestrzeni lokalnie spójnych objaśnia następujące.

Twierdzenie. *Jeśli przestrzeń jest lokalnie spójna, to składowe jej podzbiorów otwartych są otwarte.*

Dowód. Niech X będzie przestrzenią lokalnie spójną i niech G będzie jej podzbiorem otwartym. Niech S będzie składową zbioru G. Jeśli x jest punktem zbioru S, to istnieje (na mocy lokalnej spójności w tym punkcie) zbiór spójny A taki, że x należy do $intA \in A \in G$. Ponieważ S jest składową zbioru G, więc $A \in S$. Składowa S jest zatem zbiorem otwartym jako suma wszystkich zbiorów A.

Wniosek. *W przestrzeni lokalnie spójnej w każdym otoczeniu każdego punktu zawarte jest otoczenie otwarte spójne tego punktu.*

Dowód. Składowa wnętrza otoczenia jest otoczeniem otwartym i spójnym punktu.

Zbiory otwarte i spójne są nazywane *obszarami*. Dowiedzione wyżej twierdzenie orzeka, że przestrzenie lokalnie spójne mają bazę złożoną z obszarów.

Wracając do twierdzenia, zauważmy, że w szczególności składowe całej przestrzeni są otwarte. Ale składowe są zawsze zbiorami domkniętymi, są więc — dla przestrzeni lokalnie spójnych — zbiorami domknięto-otwartymi. Są więc równe quasi-składowym.

Dowiedzione wcześniej twierdzenie daje się odwrócić.

Jeśli składowe podzbiorów otwartych są otwarte, to przestrzeń jest lokalnie spójna.

Dowód. Niech X będzie przestrzenią, w której składowe zbiorów otwartych są otwarte. Niech x będzie dowolnym jej punktem i niech U będzie otoczeniem otwartym tego punktu. Składowa punktu x w zbiorze U jest otoczeniem (otwartym) spójnym punktu x.

Przestrzenie lokalnie spójne można więc określić jako przestrzenie, w których składowe zbiorów otwartych są otwarte, tj. są obszarami. Ta charakteryzacja przestrzeni lokalnie spójnych pochodzi od H. Hahna (1921)[57].

Określenie lokalnej spójności w formie takiej, jak na wstępie tego wykładu również pochodzi od H. Hahna (1914)[58]. S. Mazurkiewicz (1913, 1916, 1920) motywował lokalną spójność własnością polegającą na negacji osobliwości, jaką mają sinusoida zagęszczona, kontinua w kształcie miotełek[59], a także liczne kontinua, które poznamy w dalszych wykładach. Zob. komentarze, W. Wilkosza: *Les prorietes topologiques*…, s. 31.

Dowód następujących dwu stwierdzeń nie sprawia trudności.

Przestrzeń zwarta i lokalnie spójna ma jedynie skończenie wiele składowych.

Produkty przestrzeni lokalnie spójnych

Nie sprawia trudności przekonanie, że

Produkt dwu (a więc i dowolnej skończonej ilości) przestrzeni lokalnie spójnych jest lokalnie spójny.

Produkt dowolnej ilości przestrzeni lokalnie spójnych nie musi być lokalnie spójny, czego przykładem jest produkt przeliczalnej rodziny zbiorów dwuelementowych z topologią dyskretną, który jest homeomorficzny ze zbiorem Cantora. Ale nietrudno sprawdzić, że

[57] H. Hahn: *Über die Komponenten offener Mengen*. Fund. Math. 2 (1921), s. 189—192.

[58] H. Hahn: *Mengentheoretische Charakterisierung der stetigen Kurve*. Sitzungsberichte d. Math. Nat. W. Kl. d. K. Akad. d. W. Wien 123 (1914), s. 2433—2489; *Über die allgemeinste ebene Punktmenge, die stetiges Bild eniner Strecke ist*. Jahr. der Deutschen Math. Ver. 23 (1914), s. 318—322.

[59] S. Mazurkiewicz: *O arytmetyzacji kontinuów*. Compt Rend. de la Soc. des Sci. de Warsovie 6 (1913), s. 305—311, 941—945; *O pewnej klasyfikacji punktów leżących na kontinuach dowolnych*. Compt Rend. de la Soc. des Sci. de Varovie 9 (1916), s. 428—442; *Sur les lignes de Jordan*. Fund. Math. 1 (1920), s. 166—209.

Jeśli przestrzenie są spójne i lokalnie spójne, to ich produkt jest lokalnie spójny. Można dopuścić, aby pewna skończona ilość przestrzeni nie była spójna.

Twierdzenie Eilenberga

Topologii prostej nie można istotnie zwiększyć tak, by zachowując spójność i własność T_2 pozostała lokalnie spójną. Nie jest więc na przykład lokalnie spójną topologia gęstościowa prostej. Prawdziwe jest następujące ogólniejsze stwierdzenie.

Twierdzenie Eilenberga[60]. *Topologii uporządkowania ciągłego nie można zwiększyć tak, by pozostała spójna i lokalnie spójna*.

Dowód (S. Eilenberg (1941); W. Grudziński[61]). Niech ”¡” będzie uporządkowaniem ciągłym zbioru X. Rozważamy na X topologię zawierającą topologię uporządkowania ”¡”, tj. przyjmujemy, że przedziały bez końców są otwarte. Pokażemy, że przedziały te tworzą bazę topologii, tj. że każdy jej zbiór otwarty jest sumą przedziałów.

Rozważmy zatem dowolny zbiór otwarty tej topologii. Wobec lokalnej spójności składowe tego zbioru są otwarte. Wystarczy zatem dowieść zapowiedzianej własności dla zbiorów spójnych otwartych.

Niech G będzie tego rodzaju zbiorem. Niech a i b, $a < b$, będą kresami dolnymi i górnymi zbioru G (dopuszczamy, że mogą to być punkty w nieskończoności). Wobec ciągłości uporządkowania punkty między a i b należą do zbioru G. Dowód będzie zakończony, jeśli wykażemy, że kresy zbioru G doń nie należą; będzie to znaczyło, że zbiór G jest przedziałem (niekoniecznie skończonym).

Przypuśćmy, że kres górny b należy do G. Zbiór U punktów większych od b jest otwarty (jako półprzestrzeń). Zbiorem otwartym jest także zbiór V punktów mniejszych od b. W rezultacie, zbiorem otwartym jest zbiór $V \cup \{b\}$. Ten ostatni zbiór jest rozłączny z U i wraz z U daje całe X. Sprzeczność ze spójnością X.

Topologia wykresu funkcji nieciągłej jest zwiększeniem topologii dziedziny. Z dowiedzionego twierdzenia wnosimy zatem, że wykres funkcji rzeczywistej nieciągłej nie może być lokalnie spójny. Jest lokalnie spójny w punktach odpowiadających punktom ciągłości funkcji. Pozostawiamy jako pytanie, czy lokalna spójność wykresu w punkcie $(x, f(x))$ pociąga ciągłość f w punkcie x.

---

[60] S. Eilengerg: *Ordered topological spaces*. Amer. J. Math. 63 (1941), s. 39—45.

[61] W. Grudziński: *On compatible order ability of connected topological spaces*. Zeszyty Naukowe Politechniki Łódzkiej. Mat. 14 (1982), s. 65—72.

Wykład IV. Osobliwości spójności

Metoda Bernsteina ∗ Miotełki typu Knastera—Kuratowskiego ∗ Twierdzenie Knastera—Kuratowskiego ∗ O zbiorach dwuspójnych ∗ Miotełki typu Wildera ∗ Wykresy pochodnych ∗ Porządkowalność przestrzeni spójnych

Wspomniane dotąd osobliwości związane ze spójnością przeważnie mieściły się poza zakresem przestrzeni metrycznych i nie miały znaczenia geometrycznego. Przestrzenie rozważane w tym rozdziale będą w większości przestrzeniami metrycznymi ośrodkowymi. Będą nawet dziedziczyć topologię z płaszczyzny, a mimo to zobaczymy, jak niewielka może być różnica między spójnością i dalekimi jej przeciwstawieniami już nawet w tym zakresie, jeśli wyjdzie się poza podzbiory domknięte.

Metoda Bernsteina

Konstrukcje wspomnianych przestrzeni nie zawsze będą jednak efektywne. Ważną rolę będzie odgrywał następujący lemat mnogościowy wynikający z pewnika wyboru.

Lemat Bernsteina (1908)[62]. *Jeśli F jest rodziną mocy m zbiorów, z których każdy jest mocy (co najmniej) m, to istnieje podzbiór zbioru będącego sumą zbiorów z F taki, że zarówno ten podzbiór, jak jego dopełnienie mają punkty w każdym ze zbiorów rodziny F.*

Dowód. Niech $F_\alpha : \alpha < m$ będzie dobrym uporządkowaniem rodziny F. W zbiorze F_0 weźmy dwa punkty p_0 i q_0. Mając w zbiorach F_β dla $\beta < \alpha$, po dwa punkty p_β i q_β nienależące do zbiorów rozważanych wcześniej, weźmy w zbiorze F_α dwa punkty p_α i q_α leżące poza zbiorami *βeta* rozważanymi dotąd. Takie punkty istnieją, ponieważ moc zbioru F_α jest m, a zbiór wybranych dotąd punktów ma moc mniejszą niż m. Zbiór punktów $p_\alpha : \alpha < m$, określony w ten sposób przez indukcję, jest szukanym zbiorem.

W dowodzie lematu Bernsteina korzystaliśmy z pewnika wyboru przez twierdzenie Zermeli o dobrym uporządkowaniu. Lemat Bernsteina ma ważne znaczenie w teorii miary (konstrukcje zbiorów niemierzalnych) i w dyscyplinie nazywanej opisową teorią mnogości. Lemat Bernsteina orzeka, że w pewnych warunkach ze zbiorów danej rodziny można dokonać dwóch wyborów rozłącznych.

---

[62] F. Bernstein: *Zur Theorie der trigonometrischen Reihe*. Leipziger Berichte 60 (1908).

Posługując się lematem Bernsteina można uzyskać rozbicie płaszczyzny na dwa podzbiory spójne i gęste, z których żaden nie zawiera kontinuów wielopunktowych. Zbiory tego rodzaju są nazywane *punktokształtnymi*. Wymaganie jest słabsze niż przy dziedzicznej niespójności, skoro jak zapowiedzieliśmy, nie wyklucza ono spójności zbioru. Zbiory punktokształtne na prostej są zawsze dziedzicznie niespójne. Są wszakże podzbiory punktokształtne spójne płaszczyzny[63].

Konstrukcja zapowiedzianego rozbicia wymaga, oprócz lematu Bernsteina, wykorzystania pewnej własności geometrycznej płaszczyzny, którą mają również niektóre, nawet małe, kontinua.

Własność (W). *Zbiory domknięte rozspajające przestrzeń zawierają zbiory doskonałe.*

Płaszczyzna ma własność (W), bo zbiór rozspajający płaszczyznę musi zawierać kontinua wielopunktowe[64].

Przypomnijmy, że przez *zbiór doskonały* rozumie się zbiór zwarty (niepusty) bez punktów izolowanych.

Odcinki, okręgi, grafy nie mają własności (W), ale ma ją wiele kontinuów o bogatszej budowie. Są wśród nich również i krzywe, np. krzywa uniwersalna płaska — dywan Sierpińskiego — chociaż nie ma jej krzywa trójkątowa.

Lemat[65]. *Podzbiór przestrzeni spójnej metrycznej, mający punkty w każdym zbiorze domkniętym rozspajającym przestrzeń, jest spójny.*

Dowód. Niech A będzie podzbiorem przestrzeni metrycznej spójnej X mającym opisane własności. Oczywiście, zbiór A jest gęsty w X.

Dla dowodu, że A jest spójne przypuśćmy, że istnieje rozbicie $A = M \cup N$ zbioru A na zbiory M i N otwarte w nim i niepuste. Weźmy zbiory M' i N' otwarte w X takie, że $M' \cap A = M$ i $N' \cap A = N$. Żaden z tych zbiorów nie jest pusty, więc żaden nie jest gęsty w X. Brzegi tych zbiorów, rozspajając X, mają (na mocy założenia) punkty w zbiorze A.

Punkty te nie należą do M', a więc i do M, stąd muszą należeć do N; ale N jest otwarte w A, więc pewne ich otoczenia (w X, bo zbiór A jest gęsty w X) są rozłączne z M', co przeczy należeniu tych punktów do brzegu zbioru M'.

Twierdzenie[66]. *Kontinuum metryczne o własności (W) ma rozbicie na dwa zbiory spójne niezawierające zbiorów doskonałych, tj. ma rozbicie na dwa zbiory punktokształtne.*

---

[63] C. Kuratowski: *Topologie* II..., s. 130; przykłady tego rodzaju pojawią się w dalszym ciągu tego wykładu.

[64] E. Phragmén: *Über die Begrenzungen von Continua*. Acta Math. 7 (1885), s. 43—48; por. C. Kuratowski: *Topologie* II..., s. 338.

[65] W. Sierpiński: *Sur un ensemble ponctiforme connexe*. Fund. Math. 1 (1920), s. 7—10

[66] W. Sierpiński: *Sur la decomposition du plan en deux ensembies ponctiformes*. Bull. Intern. Acad. Sci. Cracovie A (1913), s. 76—82; S. Mazurkiewicz: *Contribution à la théorie des ensembles*. Bull. Acad. Pol. Sci. 1913, s. 46—55.

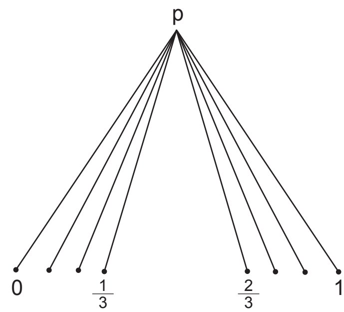
Dowód. Konstrukcję Bernsteina stosujemy do rodziny wszystkich podzbiorów doskonałych rozważanego kontinuum — przypadek $m = continuum$. Otrzymujemy rozbicie kontinuum na dwa zbiory niezawierające zbiorów doskonałych. Ich spójność wynika z ostatniego lematu wobec własności (W) rozważanego kontinuum. Jest oczywiste, że każdy z dwu zbiorów rozbicia ma punkty w każdym zbiorze doskonałym[67].

Oczywiście, twierdzenie jest prawdziwe i dla płaszczyzny, bo zwartość wykorzystujemy jedynie lokalnie.

Miotełki typu Knastera—Kuratowskiego

Podzbiór płaszczyzny powstały przez połączenie punktów trójkowego zbioru Cantora położonego na osi x-ów z punktem spoza osi x-ów, na rysunku p, nazywamy *miotełką Cantora*.

Mioteka Cantora nie ma własności (W), ale odstępstwo jest minimalne: jest tylko jeden zbiór domknięty rozspajający niezawierający zbioru doskonałego; jest nim zbiór jednopunktowy $\{p\}$ — wierzchołek miotełki[68].



Rys. 27. Miotełka Cantora

Stosując lemat Bernsteina do miotełki Cantora i do rodziny jej podzbiorów doskonałych, dostajemy jej rozbicie na dwa zbiory niezawierające zbiorów doskonałych.

Jeden z tych zbiorów, ten, do którego należy punkt p, jest na mocy lematu spójny. Po odrzuceniu punktu p staje się dziedzicznie niespójny, ponieważ zbiory spójne wielopunktowe w nim zawarte musiałyby leżeć na odcinkach miotełki Cantora; byłyby to odcinki nieredukujące się do punktów, których zbiory Bernsteina nie mogą zawierać.

O punkcie p mówi się, że jest to punkt eksplodujący tego zbioru spójnego[69].

Podana tu konstrukcja nie stanowi konstrukcji konkretnego zbioru o tej osobliwości. Daliśmy pierwszeństwo nieefektywności, gdyż jest ona mimo wszystko bliższa istocie rzeczy. Oryginalna konstrukcja Knastera i Kuratowskiego (1921) obywała się bez pewnika wyboru. Do konstruowanej przez tych autorów miotełki zalicza się punkt p, punkty o rzędnych wymiernych na odcinkach mioteki Cantora, wychodzących z punktów dwójkowo-wymier-

---

[67] Przeprowadzone rozumowanie daje wskazówkę dla dowodu — opuszczonego w *Wykładzie III* — że topologia gęstościowa nie jest topologią spójną maksymalną. Wystarczy w tym celu zbudować metodą Bernsteina rozbicie prostej na dwa zbiory, mające punkty w każdym zbiorze mierzalnym miary dodatniej, tj. rozbicie na dwa zbiory gęste topologii gęstościowej.

[68] Mimo tego odstępstwa od własności (W), w miotełce Cantora — podobnie jak w dywanie Sierpińskiego — brzegi dostatecznie małych otoczeń punktów są mocy *continuum*.

[69] B. Knaster, K. Kuratowski: *Sur les ensembles connexes*. Fund. Math. 2 (1921), s. 206—256.

nych zbioru Cantora, i punkty o rzędnych niewymiernych na pozostałych odcinkach. W dowodzie spójności korzysta się z twierdzenia Baire'a. To, że po usunięciu punktu p dostaje się zbiór dziedzicznie niespójny, jest bezpośrednio widoczne[70].

O innych przykładach miotełek osobliwych, w tym o przykładzie tych samych autorów, w których wykorzystana jest pewna własność wykresów pochodnych, będzie mowa nieco dalej.

Twierdzenia Knastera—Kuratowskiego[71]

Twierdzenie o zbiorze spójnym rozspajającym. *Niech C będzie podzbiorem spójnym przestrzeni spójnej X. Niech $X—C = U \cup V$, gdzie U i V otwarte i rozłączne. Wtedy, oba zbiory $U \cup C$ i $V \cup C$ są spójne. Są domknięte, jeśli C jest domknięte.*

Dowód. *Wobec symetrii założeń wystarczy zająć się zbiorem $U \cup C$.*

Rozważmy, *a contrario* dowolny podzbiór domknięto-otwarty W w zbiorze $U \cup C$, mający punkty wspólne z C. Wobec spójności zbioru C mamy $C \in W$. Zbiór $W' = (U \cup C) - W$ jest zbiorem domknięto-otwartym w $U \cup C$. Ponieważ $W' \in U$ (bo $C \in W$, więc W' jest zbiorem domknięto-otwartym w U).

Zbiór W' jest d.-o. w X. Istotnie, zbiór W', będący d.-o. w U, jest d.-o. w $U \cup V$, bo U jest d.-o. w $U \cup V$. Ale, będąc d.-o. w $U \cup C$, zbiór W' jest d.-o. w sumie zbiorów $U \cup V$ i $U \cup C$, tj. w X.

Ale X jest spójne, więc $W' = Ø$ lub $W' = X$.

Ponieważ $W' = X$ jest niemożliwe (bo w dopełnieniu zbioru W' zawiera się zbiór $U \cup C$, pozostaje więc $W' = Ø$, a wtedy $W = U \cup C$. Widzimy zatem, że dowolny zbiór domknięto-otwarty w $U \cup C$, zawierający C, jest równy $U \cup C$, skąd spójność $U \cup C$.

Oczywiście, $U \cup C$ jest domknięte, jeśli C jest domknięte, bo dopełnienie zbioru $U \cup C$ jest zbiorem V, który jest otwarty w $X - C$, a więc w X, wobec domkniętości C.

Spójność zbioru C jest istotna. Przykładem jest podzbiór prostej z usuniętymi z niej dwoma punktami, np. punktami –1 i 1. Zbiór $U = \{x : x > l1\}$, po dodaniu usuniętego zbioru, jest niespójny. Zatrzymajmy się na tym przypadku szczególnym, odnotowując, że *jeśli zbiór rozspajający C jest dwuelementowy, $C = \{a, b\}$, to co najmniej jeden ze zbiorów, U lub V, staje się spójnym po dodaniu pary tych punktów.*

Wróćmy do przypadku szczególnego, kiedy C jest jednopunktowe.

[70] Opis konstrukcji zbioru, wraz z dowodem jego własności, można znaleźć również w książce A. Lelka: *Zbiory*. Warszawa 1966; por. także tegoż autora *Osobliwe zbiory spójne*. Wiad. Mat. 5 (1962), s. 67—80.

[71] Z pracy z 1921 r.

Twierdzenie. *Przestrzeń spójna ma co najwyżej jeden punkt eksplodujący. Więcej: przestrzeń spójna z punktem eksplodującym nie ma — poza tym jednym — żadnego punktu rozspajającego*[72].

Dowód. Niech p będzie punktem eksplodującym przestrzeni X. Niech q będzie innym punktem tej przestrzeni. Pokażemy — co znakończy dowód — że q nie rozspaja przestrzeni X.

Przypuśćmy bowiem, że $X - \{q\} = U \cup V$, gdzie U i V są zbiorami otwartymi w $X - \{q\}$, rozłącznymi i niepustymi. Przyjmijmy, że punkt eksplodujący p należy do U. Na mocy twierdzenia Knastera—Kuratowskiego zbiór $V \cup \{q\}$ jest spójny, a przy tym wielopunktowy (wobec niepustości V) i leży poza punktem p, tam zaś nie powinno być zbiorów spójnych wielopunktowych. Sprzeczność.

Śledząc dowód, nietrudno zauważyć, że punkt eksplodujący jest punktem eksplodującym każdego podzbioru spójnego wielopunktowego.

W twierdzeniu można pójść dalej (Wilder), dowodząc (indukcja), że przestrzeń spójna z punktem eksplodującym nie jest rozspajana przez żaden podzbiór skończony zawarty w części bez punktu eksplodującego[73].

Twierdzenie o rozkładzie. *Przestrzeń spójna wielopunktowa jest sumą dwóch zbiorów (niekoniecznie rozłącznych) spójnych i różnych od całości — w szczególności zawiera podzbiór spójny wielopunktowy różny od całości, jeśli ma więcej niż dwa punkty.*

Dowód. Jeśli przestrzeń ma punkt rozspajający, to teza wynika bezpośrednio z twierdzenia Knastera—Kuratowskiego o zbiorze spójnym rozspajającym (w wersji ze zbiorem jednopunktowym).

Jeśli przestrzeń (spójna wielopunktowa) X nie ma punktów rozspajających, to weźmy dwa jakiekolwiek punkty p i q tej przestrzeni; wtedy $X = (X - \{p\}) \cup (X - \{q\})$ jest zapowiedzianym rozkładem.

O zbiorach dwuspójnych

Są wszakże przestrzenie spójne wielopunktowe, dla których nie da się uzyskać rozbicia na dwa podzbiory spójne wielopunktowe. Tego rodzaju przestrzenie nazywane są *dwuspójnymi*[74].

Łatwo zauważyć, że przestrzenie spójne mające punkt eksplodujący są dwuspójne.

Odnotujmy ważną konsekwencję twierdzenia Knastera—Kuratowskiego o zbiorze rozspajającym, zaczynając od następującego lematu.

---

[72] J.R. Kline: *A theorem concerning connected point sets*. Fund. Match. 3 (1922), s. 238—239.

[73] R.L. Wilder: *On the dispersion sets of cennected point-sets*. Fund. Math 6 (1924), s. 214—228.

[74] B. Knaster, K. Kuratowski (1921).

L e m a t. *Jeśli zbiór spójny rozspaja przestrzeń spójną, to żadna składowa dopełnienia tego podzbioru nie rozspaja tej przestrzeni.*

D o w ó d. Niech X będzie przestrzenią spójną. Jeśliby zbiór $X - S$ nie był spójny, to byłoby $X - S = U \cup V$, U i V są otwarte w $X - S$, niepuste i rozłączne. Zbiór A — jako spójny — zawierałby się w jednym z tych zbiorów. Załóżmy, że jest zawarty w U. Zbiór $V \cup S$ byłby spójny na mocy twierdzenia K n a s t e r a — K u r a t o w s k i e g o o zbiorze rozspajającym. Mielibyśmy $S \in (V \cup S) \in (X - A)$, a zatem zawieranie się składowej S w istotnie większym zbiorze spójnym $V \cup S$ (bo V jest niepuste) zwartym, a $X - A$. Sprzeczność.

Dowiedzione wcześniej twierdzenie o jedyności punktu eksplodującego jest szczególnym przypadkiem tego lematu.

T w i e r d z e n i e. *Dopełnienie podzbioru spójnego wielopunktowego przestrzeni dwuspójnej nie zawiera podzbiorów spójnych wielopunktowych; inaczej: przestrzeń dwuspójna nie zawiera spójnych wielopunktowych rozłącznych.*

D o w ó d. Niech A będzie podzbiorem spójnym wielopunktowym przestrzeni dwuspójnej. Stwierdzenie jest oczywiste, jeśli dopełnienie zbioru A jest spójne.

Niech więc dopełnienie zbioru A nie będzie spójne. Rozpada się zatem na dwa zbiory U i V otwarte w nim i niepuste. Jeśli zawiera przy tym zbiór spójny wielopunktowy, to ten zbiór i tym samym składowa S dopełnienia zbioru A zawierająca ten zbiór zawiera się w jednym ze zbiorów U lub V. Przyjmijmy, że w U. Dopełnienie składowej S jest spójne na mocy lematu. Dostajemy więc rozpad przestrzeni na zbiór S i jego dopełnienie spójne. Oba zbiory są wielopunktowe (dopełnienie zbioru S dlatego, że zawiera zbiór $A \cup V$). Sprzeczność z dwuspójnością.

Dowiedliśmy, że *w przestrzeni dwuspójnej każde dwa podzbiory spójne wielopunktowe przecinają się*. Własność ta charakteryzuje dwuspójnosć, wykluczając rozpad przestrzeni na dwa zbiory spójne wielopunktowe, co przyjęliśmy za określenie dwuspójności.

Dowiedliśmy też w szczególności, że jeśli punkt rozspaja przestrzeń dwuspójną, to jest punktem eksplodującym (w drugiej części dowodu — w której rozpatrywany był przypadek rozspajania przestrzeni przez zbiór A — z założenia wielopunktowości zbioru A nie korzystaliśmy).

Jeszcze jednym wnioskiem z ostatniego twierdzenia jest to, że *podzbiór spójny wielopunktowy przestrzeni dwuspójnej jest dwuspójny.*

Śledząc dowód twierdzenia o rozkładzie, które zapewnia zawieranie się w zbiorach spójnych wielopunktowych podzbiorów spójnych wielopunktowych różnych od całości, widać, że nie zapewnia ono niczego więcej niż istnienie podzbiorów spójnych różniących się od całości skończoną liczbą punktów. Dlatego ważnym krokiem w teorii zbiorów spójnych było twierdzenie P. Erdösa (1944) o zawieraniu się w każdym zbiorze spójnym nieskończonym (płaskim) zbioru spójnego wielopunktowego, różniącego się od całości o nieskończenie wiele punktów. Dalej pójść nie można — żądając nieprzeliczalności różnicy — bo, jak pokazała M.E. Rudin (1958)[75], 2, na

[75] P. E r d ö s: *Some remarks on connected sets*. Bull. Amer. Math. Soc. 50 (1944), s. 442—446; M.E. R u d i n: *A connected subset of the plane*. Fund. Math. 46 (1958), s. 15—24.

płaszczyźnie istnieje zbiór spójny, którego każdy podzbiór spójny wielopunktowy różni się od całości o nie więcej niż przeliczalnie wiele punktów. Konstrukcja wymaga hipotezy *continuum*. Jeśli nie wymagać więcej niż warunku oddzielności T_2, to, jak pokazał G. Gruenhage, istnieją przestrzenie spójne nieskończone (wśród nich przeliczalne T_2), których wszystkie podzbiory spójne wielopunktowe mają dopełnienia skończone[76]; użyta jest hipoteza *continuum*, co znaczy, że nie można w tym zakresie powiedzieć istotnie więcej niż to, co wynika z twierdzeń Knastera i Kuratowskiego.

Zbiór M.E. Rudin jest dwuspójny, bo w dopełnieniach jego podzbiorów spójnych wielopunktowych są już tylko zbiory przeliczalne, a te (zbiory są płaskie) nie mogą być spójne. Z twierdzenia Knastera—Kuratowskiego o rozspajaniu przez zbiór spójny wynika, że zbiór ten nie może mieć punktu eksplodującego.

Zbiory dwuspójne bez punktów eksplodujących były znane wcześniej z pracy E.W. Millera[77]; ich konstrukcja wymagała hipotezy *continuum*.

Przestrzeń zbudowana przez M.E. Rudin należy do zakresu przestrzeni *szeroko spójnych*, wyodrębnionych przez P.M. Swingle'a, tj. przestrzeni spójnych, które nie mają innych podzbiorów spójnych wielopunktowych niż gęste. Przestrzenie szeroko spójne (na płaszczyźnie) dają się budować bez hipotezy *continuum*, wszakże z użyciem pewnika wyboru[78]. Przestrzenie szeroko spójne nie muszą być jednak dwuspójne[79].

Z twierdzenia Knastera—Kuratowskiego — wersja ze zbiorem jednopunktowym — łatwo wynika, że przestrzeń szeroko spójna nie ma punktów rozspajających (tym bardziej punktów eksplodujących); zatem, w szczególności, miotełki Knastera—Kuratowskiego nie są szeroko spójne, co jest zresztą bezpośrednio widoczne.

Przestrzeń dwuspójna bez punktu eksplodującego nie musi być szeroko spójna[80]. Przestrzeń Millera jest szeroko spójna, ale wynika to z dodatkowych własności, jakie daje konstrukcja. Znany jest anons M.E. Estill (Rudin): *A biconnected set having no widely connected subset*. Bull. Amer. Math. Soc. 59 (1953), s. 346.

Odnotujmy bez dowodu następujące twierdzenie (Miller, 1937): przestrzeń dwuspójna bez punktu eksplodującego (tj. bez punktów rozspajających) nie jest rozspajana przez żaden podzbiór skończony (por. odpowiednią własność przestrzeni spójnych z punktem eksplodującym).

Po usunięciu z miotełki typu Knastera—Kuratowskiego jej punktu eksplodującego pozostałość jest dziedzicznie niespójna. Nie musi być wszakże całkowicie niespójna: quasi-składowe dopełnienia punktu eksplodującego mogą być podzbiorami wielopunktowymi gęstymi odcinków miotełki Cantora (zgodnie z przeprowadzoną nieefektywną konstrukcją, oba zbiory mają punkty we wszelkich ich pododcinkach; pierwsza z implikacji w (B) jest więc nieodwracalna.

W miotełkę Cantora można wszakże wbudować zbiór spójny, tak by na każdym odcinku miotełki miał, nie licząc jej wierzchołka, co najwyżej jeden punkt.

---

[76] G. Gruenhage: *Spaces in which the nondegenerate connected sets are the confinite sets*. Proc. Amer. Math. Soc. 122 (1994), s. 911—924.

[77] E.W. Miller: *Concerning biconnected sets*. Fund. Math. 29 (1937), s. 123—133.

[78] P.M. Swingle: *Two types of connected sets*. Bull. or the Amer. Math. Soc. 37 (1931), s. 254—258.

[79] Wskazówka dla dowodu jest w *Wykładzie VII*.

[80] M.E. Rudin: *A biconnected set in the piane*. Topology and its Appl. 66 (1995), s. 141—148.

Miotełki typu Wildera

Pokażemy tu konstrukcję zbiorów spójnych o wspomnianej wyżej własności[81].

Niech F będzie rodziną wszystkich podzbiorów domkniętych miotełki Cantora, przecinających *continuum* odcinków miotełki. Rodzina F ma moc *continuum*. Niech $\{F_\alpha : \alpha < c\}$ będzie dobrym uporządkowaniem rodziny F. W zbiorze F_0 weźmy punkt p_0. Mając w zbiorach F_β dla $\beta < \alpha$ po jednym punkcie p_β wybranym tak, że należą one do różnych od siebie odcinków miotełki Cantora, bierzemy w zbiorze F_α punkt p_α nienależący do żadnego z odcinków miotełki, do których należą punkty p_β, $\beta < \alpha$.

Zbudowany w ten sposób zbiór $\{p_\alpha : \alpha < continuum\}$, powiększony o punkt p, staje się spójny (poprzedni dowód się przenosi).

Po usunięciu punktu p zbiór staje się całkowicie niespójny, mając na każdym odcinku zawartym w miotełce Cantora co najwyżej jeden punkt. Nie ma wszakże — co zapewnia nieefektywna konstrukcja — bazy zbiorów domknięto-otwartych; nie jest więc odwracalna także druga implikacja w (6).

Użyliśmy pewnika wyboru. Oryginalna konstrukcja Wildera (1927) była efektywna. Również bez pewnika wyboru B. Knaster (1946) zbudował dla każdego $n \geqslant 2$ zbiory o osobliwości Wildera położone w przestrzeniach euklidesowych E^n, które rozspajają te przestrzenie[82].

Nie każdy zbiór z punktem eksplodującym można przerzedzić, usuwając z niego pewne punkty, tak by stał się zbiorem o osobliwości Wildera. Odpowiedni zbiór — na płaszczyźnie — zbudował R. Duda, konstrukcja wymaga jednak hipotezy *continuum*[83].

W artykule przeglądowym F.B. Jones wspomina inne przykłady zbiorów o osobliwości Wildera, m.in. swój przykład z 1942 roku, powstały z wykresu funkcji addytywnej[84].

Co do przestrzeni spójnych z punktem eksplodującym stawiano hipotezę[85], że punkt eksplodujący jest punktem stałym każdego odwzorowania ciągłego przestrzeni w siebie, o ile to odwzorowanie nie jest *constans*. Hipoteza potwierdza się dla miotełki Knastera—Kuratowskiego. H. Katsuura[86] zbudował wszakże przestrzeń metryczną spójną z punktem eksplorującym niemającą tej własności.

Budowane w tym wykładzie przestrzenie były metryczne i ośrodkowe (nawet płaskie). Nie były jednak zwarte. Zwartość (przy założeniu T_2) kładzie tamę temu rodzajowi osobliwości (co zobaczymy w następnym wykładzie przy okazji lematu Janiszewskiego).

---

[81] R.L. Wilder: *A point set which has no true quasi-components and which becomes connected upon the addition of single point*. Bull. Amer. Math. Soc. 33 (1927), s. 423—427.

[82] B. Knaster: *O dwuswjaznych mnożestwach, jawlajuszczichsia kupiurami ewklidowych prostranstw proizwolno wysokoj razmiernostki*. Mat. Sbomik 9 (61) (1946), s. 7—18.

[83] R. Duda: *On biconnected sets with dispersion points*. Diss. Math. 37 (1964).

[84] F.B. Jones: *Wilder on connectedness*. Algebraic and Geometric Topology, Proceedings, Santa Barbara 1977; Lectures Notes in Math. 664, Springer 1978, s. 1—6; F.B. Jones: *Connected and disconnected piane sets and the functional equation* $f(x) + f(y) = f(x + y)$. Bull. Amer. Math. Soc. 48 (1942), s. 115—120; R. Maehara: *On a connected dense proper subgroup of* R_2 *whose complement is connected*. Proc. Amer. Math. Soc. 97 (1986), s. 556—558.

[85] J. Cobb, W. Voxman: *Dispersion point and fixed points*. Amer. Math. Monthly 87 (1980), s. 278—281.

[86] H. Katsuura: *Dispersion points and continuous Junctions*. Topology and its Appl. 28 (1988), s. 233—240.

Istnieją przestrzenie spójne łączące w sobie obie osobliwości, jakie pojawiły się dotąd w tych wykładach: są przeliczalne i mają punkt eksplodujący, będąc przy tym klasy T_2[87].

Wykresy pochodnych

Jak dowiedli Kuratowski i Sierpiński wykres (wszędzie istniejącej) pochodnej funkcji rzeczywistej jest podzbiorem spójnym płaszczyzny, i że co więcej, własność tę mają wszystkie funkcje klasy I-ej Baire'a o własności Darboux[88]. Twierdzenie Kuratowskiego—Sierpińskiego nie wychodzi wszakże poza zakres pochodnych, bo jak dowiódł Maximoff[89], dziedzinę funkcji I-ej klasy Baire'a o wlasności Darboux można przeparametryzować homeomorfizmem tak, by stała się pochodną. Sama własność Darboux nie wystaczy dla spójności wykresu, jak pokazuje znany przykład Cesaro funkcji II-ej klasy Baire'a[90]. Nie bez znaczenia jest to, że wykresy pochodnych są topologicznie zupełne[91].

Osobliwość funkcji rzeczywistej wszędzie różniczkowalnej może polegać na tym, że pochodna zeruje się na zbiorze gęstym, mimo że funkcja nie jest stała. Tego rodzaju funkcje budowali na przełomie XIX i XX wieku A. Koepcke i D. Pompeju, mając na uwadze ich znaczenie w teorii całki[92].

Nie odwołując się do specyficznych własności tego rodzaju funkcji, pomyślmy wykres W funkcji g, która jest pochodną tego rodzaju funkcji.

---

[87] P. Roy: *A countable connected Urysohn space with a dispersion point*. Duke Math. Journ. 33 (1966), s. 331—334; E.J. Vought: *A countable connected Urysohn space with a dispersion point that is regular almost everywhere*. Coll Math. 28 (1973), s. 205—209; W. Gustin: *Countable connected spaces*. Bull. Amer. Math. Soc. 52 (1946), s. 101—106. Inne prace na ten temat: J. Martin: *A countable Hausdorj space with a dispersion point*. Duker Math. J. 33 (1966), s. 165—167; G. Miller: *Countable connected space*. Proc. Amer. Math. Soc. 26 (1970), s. 255—360; V. Kannan: *A countable connected Urysohn space containing a dispersion point*. Proc. Amer. Math. Soc. 35 (1972), s. 289—290.

[88] K. Kuratowski, W. Sierpiński: *Les fonctions de clase I et les ensembles connexes punctiformes*. Fund. Math. 3 (1922), s. 303—313.

[89] I. Maximoff: *Sur la transformation continue de qquelques fonctions en derivees exactes*. Bull. Soc. Phys. Math. Kazan 3:12 (1940), s. 57—81; *On continuous transformations of some functions into an ordinary derivee*. Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa 12 (1943), s. 147—160.

[90] S. Marcus: *Functions with Darboux property and functions with connected graphs*. Math. Ann, 141 (1960), s. 311—317. W. Sierpiński: *Działania nieskończone*, s. 140; por. także Kuratowskiego: *Topologie II*, Warszawa 1953, s. 82. Wykresom niespójnym funkcji o własności Darboux poświęcona jest praca Marcusa

[91] W. Sierpiński: *Sur les images des fonctions representables analytiquement*. Fund. Math. 2 (1921), s. 179—188.

[92] Z dzieł klasycznych odnotujmy na ten temat komentarze z E.W. Hobsona: *The theory of functions of a real variable and theory of Fourier's series*, 1926, a z późniejszych A.M. Bucknera: *Differentiation of real functions*. Springer, Lecture Notes in Math. 659, 1978; także *Wykłady III*, autora (niepublikowane).

Punkty wykresu W, reprezentujące zera funkcji g zajmują pewną gęstą część A osi x-ów.

Poza osią x-ów wykres funkcji g nie zawiera żadnych podzbiorów spójnych wielopunktowych. Istotnie, jeśli S byłby takim zbiorem, to jego rzut na oś x-ów, jako zbiór spójny wielopunktowy, zawierałby przedział, a więc i punkty zbioru gęstego A na którym funkcja g się zeruje, co jest niemożliwe.

Osobliwością jest już samo to, że zbiór spójny W po odjęciu jego części leżącej na osi x-ów staje się dziedzicznie niespójny. Ale tę osobliwość unaoczni się jeszcze bardziej, jeśli odcinek będący dziedziną funkcji g zredukujemy do punktu. Otrzymana w ten sposób z płaszczyzny przestrzeń ilorazowa pozostanie nadal topologicznie płaszczyzną[93]. Obraz wykresu W jest zbiorem spójnym z punktem eksplodującym — por. B. Knaster, K. Kuratowski (1925). Sam wykres W jest jeszcze jednym przykładem zbioru płaskiego, spójnego i punktokształtnego.

W pracach A. Lelka[94] pojawiły się zbiory spójne z punktem eksplodującym, powstałe w sposób podobny do tu opisanego, z wykresu pewnych funkcji półciągłych górnie o własności Darboux, zerujących się na zbiorach gęstych. Te specjalne miotełki osobliwe znalazły dla siebie miejsce w pewnych konstrukcjach topologii dynamicznej[95].

Porządkowalność przestrzeni spójnych

Przypomnijmy, że przestrzeń nazywamy *porządkowalną*, jeśli istnieje uporządkowanie wyznaczające jej topologię. Wyjaśnimy tu za S. Eilenbergiem (1941)[96] problem porządkowalności przestrzeni spójnych.

Przez przekątnię kwadratu $X \times X$ przestrzeni X rozumiemy zbiór $D(X) = \{(x, x) : x \in X\}$. Jeśli X jest przestrzenią T_2, a to będziemy dalej zakładać, przekątnia jest podzbiorem domkniętym kwadratu $X \times X$. Symetrią kwadratu $X \times X$ nazwijmy odwzorowanie ϕ kwadratu przeprowadzające (x, y) na (y, x). Symetria ϕ jest inwolucją ciągłą, a przekątnia stanowi jej zbiór punktów stałych.

Twierdzenie 1. *Jeśli topologia klasy T_2 przestrzeni (wielopunktowej) X jest wyznaczona przez uporządkowanie, to dopełnienie przekątni $X \times X$ jest niespójne. Dokładniej, dopełnienie przekąni ma rozpad na zbiory $G = \{(x, y) : x < y\}$* i *$H = \{(x, y) : y < x\}$, otwarte* w *$X \times X$; mamy przy tym $\phi(G) = H$* i *tym samym — $\phi(H) = G$ dla opisanej wcześniej inwolucji.*

---

93 Powołujemy się na znane twierdzenie Moore'a, p. np. Kuratowski: *Topologie II*, s. 380.

94 A. Lelek: *On plane dendroids and their end points in the classical sens*. Fund. Math. 49 (1961), s. 301—319. por. na ten temat pracę J.W. Charatonika: *The Lelek fan is unique*. Houston J. Math 15 (1989), s. 27—34.

95 J.M. Aarts, Lex G. Oversteegen: *The geometry of Julia sets*. Trans. Amer. Math. Soc. 338 (1993), s. 897—918.

96 S. Eilenberg: *Ordered topological spaces*. Amer. J. Math. 63 (1941), s. 39—45. Por. B. Halpern: *A characterization of the circle and the interval*. Pacific Math. J. 32 (1970), s. 373—414; H. Herrlich: *Ordnungsfahigkeit zusammenhangener Raume*. Fund. Math. 57 (1965), s. 305—311.

D o w ó d. Otwartość zbiorów G i H w $X \times X$ jest prostą konsekwencją własności T_2, którą mają topologie uporządkowań.

Istotnie, weźmy (x, y) w zbiorze G. Mamy $x < y$. Niech U i V będą rozłącznymi sobą przedziałami wokół tych punktów. Jest $x' < y'$ dla $x' \in U$ i $y' \in V$; mamy więc $(x, y) \in U \times V \in G$, co dowodzi otwartości w $X \times X$ zbioru G (to samo dotyczy zbioru H).

Nie wykorzystaliśmy w pełni tego, że topologia przestrzeni X jest topologią uporządkowania, lecz jedynie to, że przedziały są zbiorami otwartymi, tj. że topologia przestrzeni X zawiera topologię wyznaczoną przez uporządkowanie $<$.

Istotny dla dalszych rozumowań będzie następujący

L e m a t. *Niech X będzie przestrzenią spójną T_1. Nie istnieje rozbicie zbioru $X \times X - D(X)$ na podzbiory otwarte w nim i niepuste G* i *H takie, że $\phi(G) = G$* i *$\phi(H) = H$.*

D o w ó d. Przypuśćmy, że tego rodzaju rozbicie na zbiory *G i H* istnieje. Ustalmy x w zbiorze X i rozważmy zbiory.

$M_x = \{x' \in X : (x, x') \in G\}$ i $\{N_x = x' \in X : (x, x') \in H\}$.

Zbiory te stanowią rozbicie zbioru $X - \{x\}$ na podzbiory w nim otwarte. Są one otwarte również w X, co jest konsekwencją warunku T_1.

Na mocy twierdznia K n a s t e r a—K u r a t o w s k i e g o o rozspajaniu przez zbiory spójne, zbiory $Mx \cup \{x\}$ i $Nx \cup \{x\}$ są spójne, a wobec domkniętości zbioru jednopunktowego $\{x\}$ są domknięte.

Ustalmy y w zbiorze M_x i weźmy z w zbiorze N_x, różne od y.

Z tego, że $y \in M_x$, wnioskujemy, że $(x, y) \in G$. Ale $(x, y) \in N_x \times \{y\}$ i zbiór $N_x \times \{y\}$ jest spójny (bo N_x jest spójne), więc $N_x \times \{y\} \subset G$. Wiedząc, że $z \in N_x$, wnioskujemy, że $(z, y) \in G$.

Z tego, że $z \in N_x$, wnioskujemy (w ten sam sposób, co poprzednio, wobec symetrii założeń), że $(y, z) \in H$.

Ale $(y, z) \in H$ i $(z, y) \in G$ jest sprzeczne z rozłącznością zbiorów G i H (bo z $\phi(G) = G$ dostajemy $\phi(z, y) = (y, z) \in G$).

W n i o s e k. *Jeśli X jest spójne i klasy T_1, przekątnia nie może rozspajać zbioru $X \times X$ na dwa sposoby. Dokładniej, jeśli pary $\{G, H\}$ i $\{U, V\}$ reprezentują dwa tego rodzaju rozbicia, to $G = U$ i $H = V$, lub (z uwagi na symetrię), $G = V$ i $H = U$.*

Istotnie, mając dwa różne rozbicia wspomniane w części szczegółowej wniosku, dla rozbicia na zbiory $A = (G \cap U) \cup (H \cap V)$ i na zbiór B będący dopełnieniem zbioru A, mielibyśmy $\phi(A) = A$ i $\phi(B) = B$, w sprzeczności z dowiedzionym lematem.

Przyjmijmy teraz, że przekątnia przestrzeni X klasy T_2 rozspaja jej kwadrat. Niech G i H będą elementami jedynego możliwego rozbicia jej dopełnienia. Warunek T_2 zapewnia otwartość w $X \times X$ zbiorów rozbicia. Wobec dowiedzionego lematu symetria ϕ przekształca te zbiory jeden na drugi. Mamy $\phi(G) = H$ i $\phi(H) = G$.

Przyjmijmy

(13) $$x < y, \text{ jeśli } (x, y) \in G \text{ oraz } y < x, \text{ jeśli } (x, y) \in H$$

Wykażemy, że określona w ten sposób relacja „¡" porządkuje (w sposób ostry) zbiór X.

Warunki (l') i (3') dla nierówności ostrych z *Wykładu I* (liniowość i trychotomia) są spełnione w sposób oczywisty.

Dla dowodu (2') (przechodniości) zauważmy, że dla każdego t ze zbioru X zbiory $A_t = \{u : u < t\}$ i $B_t = \{u : u > t\}$ są otwarte w X (jako rzuty zbiorów $G \cap (\{t\} \times X)$ i $H \cap (X \times \{t\})$).

Mamy $X - \{t\} = A_t \cup B_t$, a zbiory A_t i B_t są rozłączne (wynika to z (1') i (3')). Z twierdzenia Knastera–Kuratowskiego o rozspajaniu przez zbiór spójny wnioskujemy o spójności zbiorów $\{t\} \cup A_t$ i $\{t\} \cup B_t$.

Dla zakończenia dowodu przechodniości niech $x < y$ i $y < z$. Pierwsza nierówność znaczy $y \in B_x$, skąd $y \cup B_y \in B_x$, wobec spójności pierwszego z tych zbiorów. Druga nierówność znaczy $z \in B_y$, skąd $z \in B_x$, a więc $x < z$.

Z dowiedzionej wcześniej otwartości zbiorów A_t i B_t wnioskujemy teraz, że topologia na X zawiera topologię wyznaczoną przez określone przez nas uporządkowanie $<$.

Dostaliśmy w ten sposób

Twierdzenie 2 (Eilenberg, loco cit.). *Jeśli X jest przestrzenią T_2, spójną i taką, że przekątna rozspaja jej kwadrat $X \times X$, to jest dokładnie jedno rozbicie dopełnienia przekątni na zbiory otwarte, a topologia przestrzeni X jest topologią zawierającą topologię porządkową wyznaczoną warunkiem* (13) *przez wspomniane rozbicie.*

Wobec równorzędnej (wobec inwolucji ϕ) roli zbiorów G i H innym uporządkowaniem może być jeszcze uporządkowanie przeciwne do określonego.

Nie uzyskaliśmy porządkowalności przestrzeni. Nie zawsze jest to możliwe, a przykładem jest topologia gęstościowa prostej. Innymi przykładami są wspomniane wcześniej wykresy (spójne) pochodnych (nieciągłych), w szczególności z osobliwościami typu Pompeiu.

Ale są przypadki, kiedy topologia zawierająca topologię porządkową spójną jest po prostu topologią porządkową. Jest tak na przykład, kiedy topologia majoryzująca jest zwarta (spójność nie gra tu żadnej roli). Innym przypadkiem jest lokalna spójność topologii spójnej majoryzującej, co omówiliśmy w *Wykładzie II* (Eilenberg, Grudziński), w części dotyczącej lokalnej spójności. Odnotujmy więc jako wniosek

Twierdzenie Eilenberga. *Przestrzeń spójna, lokalnie spójna i klasy T_2, której kwadrat jest rozspajany przez przekątnią, jest porządkowalna.*

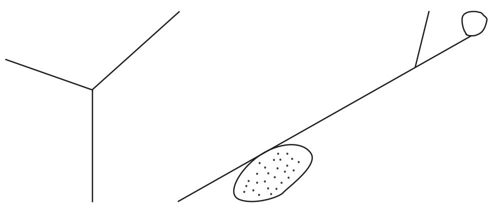
Dla zilustrowania geometrycznego znaczenia twierdzenia wyjdźmy od spostrzeżenia, że triod (oznaczany dalej przez T), tj. figura w kształcie litery T, nie jest porządkowalna (ma punkt rozgałęzienia, którego otoczenia, jeśli są dostatecznie małe, mają brzegi co najmniej trójpunktowe, podczas gdy punkty przestrzeni uporządkowanych mają dowolnie małe otoczenia o brzegach co najwyżej dwupunktowych). Z twierdzenia Eilenberga wnosimy, że przekątnia nie rozspaja produktu $T \times T$. Dowód bezpośredni (geometryczny) tego faktu jest kłopotliwy.

Wykład V. Kontinua

∗ Kontinua — określenie ∗ Kontinua nieprzywiedlne ∗ Twierdzenie Moore'a o punktach nierozspajających ∗ Pewna charakteryzacja topologiczna zbioru Cantora ∗ Charakteryzacja topologiczna odcinka ∗ O charakteryzacjach topologicznych okręgu ∗ Odwzorowania otwarte odcinka ∗ Punkty rozgałęzienia ∗ Lemat Janiszewskiego ∗ Twierdzenie Sierpińskiego

Kontinua — określenie

Przestrzenie zwarte i spójne nazywane są *kontinuami*. Poza jednopunktowymi[97], najprostszymi kontinuami jest odcinek prostej rzeczywistej i odcinki uogólnione, tj. zbiory z topologiami wyznaczonymi przez uporządkowania ciągłe i mające elementy skrajne. Już wśród tych kontinuów — jeśli nie są metryczne — mogą powstać zagadnienia nie do rozstrzygnięcia środkami ZFC (np. hipoteza Suslina; por. *Wykład II*).



Rys. 28. Triod i bardzo proste kontinuum płaskie

Suma dwu kontinuów mających punkt wspólny jest kontinuum. Produkt skończenie wielu, a także ilukolwiek kontinuów jest kontinuum[98]. Zatem kontinuami są grafy takie jak triod na rys. 28, oraz kostki euklidesowe, wielościany spójne, kostka Hilberta i — ogólniej — kostki Tichonowa.

Innym źródłem nowych kontinuów są przekroje ciągów zstępujących,

$$C_1 \supset C_2 \supset ..., \tag{14}$$

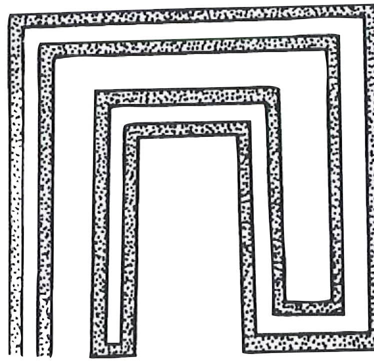
znanych wcześniej kontinuów (klasy T_2); por. twierdzenie 9 *Wykładu II*. Wychodząc nawet z bardzo prostych kontinuów C_n.

Jak osobliwy może być przekrój ciągu zstępującego już bardzo prostych kontinuów na płaszczyźnie, z których każde jest homeomorficzne z kwadratem płaskim, pokazuje przykład kontinuum Janiszewskiego—Knastera (dokładniej omówione w wykładzie o kontinuach nierozkładalnych), którego opisem niech będzie na razie rys. 29.

[97] Nie warto myśleć o kontinuach pustych: rolę obiektu zerowego odgrywa kontinuum jednopunktowe.

[98] Każda z tych operacji zachowuje zarówno spójność (por. *Wykład II*), jak i zwartość.

Teoria kontinuów (jeśli można ją tak nazwać, bo przypomina raczej zbiór faktów) skupia się na dwu biegunach: kontinuach o budowie prawidłowej (odcinki, dendryty i, ogólniej, kontinua lokalnie spójne) i o budowie geometrycznie osobliwej (kontinua nierozkładalne). Istnieje wyraźny podział na zagadnienia dotyczące kontinuów metrycznych i niemetrycznych.



Rys. 29. Kontinuum Janiszewskiego–Knastera (trzecie przybliżenie).

Kontinua nieprzywiedlne

Kontinuum X nazywane jest *nieprzywiedlnym między punktami a i b*[99], jeśli nie zawiera kontinuum mniejszego — właściwego — łączącego te punkty. Odcinki uogólnione, w szczególności odcinki prostej rzeczywistej, są nieprzywiedlne między swoimi końcami. Sinusoida zagęszczona jest kontinuum nieprzywiedlnym między punktem końcowym a dowolnym punktem na odcinku zagęszczenia. Kontinuum Janiszewskiego—Knastera jest nieprzywiedlne między każdym punktem leżącym na brzegu jakiejkolwiek ze wstęg występujących w konstrukcji (por. rysunek) a dowolnym punktem nieleżącym na żadnym takim brzegu; w istocie, jest więcej tego rodzajów par punktów (będzie o tym mowa w rozdziale o kontinuach nierozkładalnych, *Wykład IX*).

Twierdzenie[100]. *Kontinuum klasy T_2 zawiera wraz z każdymi dwoma punktami kontinuum nieprzywiedlne między tymi punktami.*

Dowód. Niech X będzie kontinuum T_2. Niech a i b będą punktami tego kontinuum. Weźmy pod uwagę kontinua C zawarte w X takie, że $a \in C$ i $b \in C$. Rozważmy łańcuch[101] maksymalny w zbiorze wspomnianych wyżej kontinuów (w ich uporządkowaniu częściowym przez inkluzje). Przekrój tego łańcucha jest — wobec twierdzenia 9 z *Wykładu II* — kontinuum. Jest to kontinuum nieprzywiedlne między a i b.

Zasługuje na przypomnienie dawny dowód Mazurkiewicza (1910), który przedstawimy na przykładzie możliwie prostym, jakim jest kwadrat płaski K, por. rys. 30, i dwa w nim punkty A i B będące jego przeciwległymi narożami. Jednym z kontinuów nieprzywiedlnych łączących w tym kwadracie A i B jest przekątnia AB. Ale postępowanie prowadzące do istnienia kontinuów

---

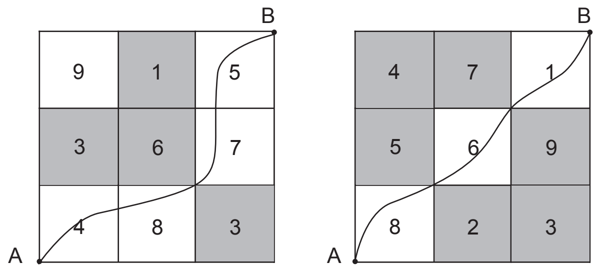
[99] L. Zoretti, 1909.

[100] Twierdzenie pochodzi z prac Z. Janiszewskiego i S. Mazurkiewicza publikowanych w latach 1910—1912. Jest w *Tezie* Z. Janiszewskiego: *Sur les continus irreductible entre deux points*. „Journal de l'Ecole Polytechnique" 16 (1912), s. 79—170 (wcześniej w Gauthiere-Villars 1911) i w pracy S. Mazurkiewicza: *Sur la theorie des ensembles*. CR Paris 151 (1910), s. 251—258. U podstaw współczesnego dowodu leży lemat Kuratowskiego—Zorna. W dawniejszych dowodach przeprowadzanych dla kontinuów metrycznych używana była *zasada indukcyjna* Brouwera (por. Kérekjártó, s. 43) albo wprost indukcja z pewnikiem wyboru.

[101] Łańcuch w znaczeniu takim, w jakim używa się tego terminu w lemacie Kuratowskiego—Zorna.

nieprzywiedlnych jest niejednoznaczne [może, zależnie od biegu indukcji, wyznaczać rozmaite kontinua nieprzywiedlne od A do B].

Podzielmy kwadrat na p^2 równych kwadratów, por. rys. 30, i ponumerujmy je liczbami 1, 2,..., p^2 według własnego wyboru. Usuwamy wnętrze kwadratu o numerze 1, jeśli pozostałość jest nadal kontinuum łączącym A i B. Usuwamy wnętrze kwadratu o numerze 2, jeśli nowa pozostałość jest nadal kontinuum łączącym A i B. Kontynujemy postępowanie. Dostajemy ciąg zstępujący kontinuów łączących A i B. Odnotujmy kontinuum K_p, ostatnie (najmniejsze).



Rys. 30. Kontinuum K_p przy dwu różnych numeracjach i odpowiadające im kontinua nieprzywiedlne między A i B

Weźmy liczbę q większą niż p. Podzielmy kwadrat K na q^2 równych kwadratów. Załóżmy, że q jest liczbą pierwszą, podobnie jak liczby, które pojawią się później jako liczby podziału boku kwadratu K; uzasadnienie tego rodzaju założenia nastąpi później. Ponumerujmy te kwadraty liczbami 1, 2,..., q^2. Usuńmy z K_p punkty z wnętrza kwadratu o numerze 1, jeśli pozostałość jest nadal kontinuum łączącym punkty A i B. Usuńmy z tej pozostałości punkty wnętrza kwadratu o numerze 2, jeśli pozostałość jest nadal kontinuum łączącym A i B. Postępując tak dalej, po q_2 krokach, pozostaje nam kontinuum, nazwijmy je K_{pq}, zawarte w K_p, łączące punkty A i B.

Postępując jak dotąd, dostajemy dla liczb pierwszych $p < q < r < \ldots$ ciąg zstępujący $K_p \supset K_{pq} > K_{pqr} > \ldots$ podkontinuów kwadratu K łączących punkty A i B. Przekrój tych kontinów jest zapowiedzianym kontinuum nieprzywiedlnym.

1. Usuwanie wnętrz kwadratów nie wyklucza, że na liniach podziału mogą pozostać punkty spoza K. Będą one usunięte w następnym kroku, jeśli w liczbie odcinków podziału boku kwadratu pojawi się czynnik pierwszy dotąd niewystępujący. Dlatego za liczby p, q, r,... najlepiej przyjąć od razu pełny (rosnący) ciąg liczb pierwszych.

2. Na każdym kroku konstrucji dokonujemy arbitralnej numeracji kwadratów podziału. Na rys. 30 pokazujemy dla $p = 3$ rezultat K_3 przy różnych numeracjach, co ilustruje rolę swobodnych wyborów w tej nieefektywnej konstrukcji nazywanej *indukcją z pewnikiem wyboru*.

Twierdzenie Moore'a o punktach nierozspajających

Niech punkt x rozspaja kontinuum X. Mamy wtedy *rozpad* (zbioru $X - \{x\}$) zbioru $X - \{x\}$ na dwa zbiory domknięto-otwarte w $X - \{x\}$: są to zbiory otwarte w X, jeśli X jest T_1.

Ustalmy punkt a w kontinuum X.

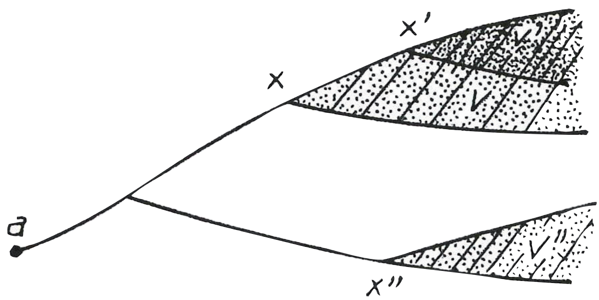
Jeśli x, $x \neq a$, jest punktem rozspajającym kontinuum X i $X - \{x\} = U \cup V$ jest rozpadem, to ten spośród zbiorów U i V, do którego punkt a nie należy, nazywany będzie *odgałęzieniem* w punkcie x (poza punktem a), wyznaczonym przez dany rozpad.

Z twierdzenia Knastera—Kuratowskiego o rozspajaniu przez zbiory spójne (por. *Wykład III*) wynika, że *zbiory* $\{x\} \cup U$ i $\{x\} \cup V$ *są kontinuami.*

Lemat o odgałęzieniach: *Niech x i x' będą różnymi od siebie punktami kontinuum X klasy T_1. Jeśli V jest odgałęzieniem w punkcie x i V' jest odgałęzieniem w punkcie x' (oba poza punktem a, co implikuje m.in. $a \notin V'$ i $a \notin V'$), to*

$x' \in V \Rightarrow x \notin V'$ i $\{x'\} \cup V' \subset V$,

$x \in V' \Rightarrow x' \notin V$ i $\{x\} \cup V \subset V'$.



Rys. 31. Odgałęzienia poza punktem *a*

Dowód (pierwszej implikacji; druga nie wymaga dowodu ze względu na symetrię założeń). Przypuśćmy, że $x \in V'$. Zbiór $\{x\} \cup V \cup \{x'\} \cup V'$ jest domknięty jako suma dwu zbiorów domkniętych. Zbiór ten jest otwarty, bo jest równy $V \cup V'$. Jest niepusty i jest różny od całości (punkt a nie należy do $V \cup V'$). Sprzeczność ze spójnością przestrzeni X.

Mamy więc $x \notin V'$. Kontinuum $\{x'\} \cup V'$ jest więc zawarte w $X - \{x\}$, a mając punkt x' w zbiorze V domknięto-otwartym w $X - \{x\}$, musi być zawarte w V.

Formalnie, odgałęzienia V (poza ustalonym punktem a) należy traktować jako pary $\{x, V\}$, gdzie V jest zbiorem otwartym w $X - \{x\}$ i $a \notin V$. Z lematu o odgałęzieniach wynika, że relacja $\{x', V'\} \leqslant \{x, V\}$ polegająca na zawieraniu $\{x'\} \cup V' \subset V$ porządkuje częściowo zbiór rozgałęzień.

Niech $\mathcal{L}$ będzie łańcuchem w zbiorze odgałęzień (poza ustalonym punktem). *Przekrój* $\bigcap\{\ \{x\} \cup V : V \in \mathcal{L}\}$ *jest zbiorem niepustym* jako przekrój łańcucha zbiorów (niepustych) domkniętych (własność T_1) w przestrzeni zwartej. Ale również

Przekrój $\bigcap \mathcal{L}$ *jest niepusty.*

Jest to oczywiste, jeśli w $\mathcal{L}$ jest element ostatni. Jeśli nie ma takiego elementu, to przekrój $\bigcap \mathcal{L}$ jest równy przekrojowi kontinuów $\{x\} \cup V$, $V \in \mathcal{L}$, bo dla każdego elementu V łańcucha $\mathcal{L}$ istnieje inny element V' łańcucha $\mathcal{L}$ taki, że $\{x'\} \cup V' \subset V$.

Jeśli $\mathcal{L}$ jest łańcuchem maksymalnym w zbiorze odgałęzień (poza ustalonym punktem), to żaden punkt zbioru $\bigcap \mathcal{L}$ nie rozspaja kontinuum.

Dowód. Niech $z \in \bigcap \mathcal{L}$. Jeśliby punkt z rozspajał kontinuum, to biorąc jakiekolwiek odgałęzienie W w punkcie z (poza ustalonym punktem) mielibyśmy, na mocy lematu o odgałęzieniach, $\{z\} \cup W \subset V$ dla wszelkich V z łańcucha $\mathcal{L}$, wbrew maksymalności łańcucha.

Na mocy lematu Kuratowskiego—Zorna łańcuchy maksymalne w zbiorze odgałęzień (poza ustalonym punktem) istnieją. Stąd, wobec ostatniego z dowiedzionych twierdzeń i niepustości przekrojów łańcuchów zbiorów domkniętych niepustych w przestrzeniach zwartych, dostajemy

Twierdzenie. *Kontinuum klasy T_1 ma w każdym odgałęzieniu punkty nierozspajające.*

W konkluzji — nieco upraszczając — dostajemy jedno z najbardziej podstawowych twierdzeń w teorii kontinuów:

Twierdzenie Moore'a[102]. *Kontinuum wielopunktowe T_1 ma co najmniej dwa punkty nierozspajające.*

Dowód. Niech X będzie kontinuum wielopunktowym T_1. Niech $a \in X$. Jeśli a nie rozspaja, to biorąc jakikolwiek punkt x rozspajający (jeśli takiego punktu a nie ma, to nie ma czego dowodzić) i odgałęzienie, poza a, w punkcie x, stwierdzamy, na mocy ostatniego wniosku, istnienie w tym odgałęzieniu drugiego punktu nierozspajającego.

Jeśli a rozspaja, to weźmy dowolny rozpad $X - \{a\} = U \cup V$ w punkcie a. Niech b będzie dowolnym punktem w zbiorze U. Wtedy V jest odgałęzieniem w punkcie a poza b. Na mocy ostatniego wniosku, w zbiorze V istnieje punkt nierozspajający. Drugi, na tej samej zasadzie, istnieje w zbiorze U.

Odcinki uogólnione, wśród nich odcinek prostej rzeczywistej, są kontinuami mającymi dokładnie dwa punkty nierozspajające: wszystkie punkty, z wyjątkiem skrajnych, rozspajają.

Eilenberg (1934) dowiódł (dla kontinuów metrycznych) twierdzenia bardziej szczegółowego: *jeśli kontinuum (metryczne) przedstawić w postaci sumy zbiorów spójnych, to istnieją wśród tych zbiorów dwa takie, że jeśli zsumować wszystkie zbiory, z wyjątkiem któregokolwiek z tych dwu, to dostanie się zbiór spójny*[103].

Pewna charakteryzacja topologiczna zbioru Cantora

Podzbiór otwarty niepusty zbioru Cantora jest bądź homeomorficzny ze zbiorem Cantora, jeśli jest zwarty, bądź homeomorficzny ze zbiorem Cantora pozbawionym punktu, jeśli nie jest zwarty. Nietrudny dowód pomijamy. Stwierdzenie to można wypowiedzieć w skrócie tak: *zbiór Cantora ma z dokładnością do homeomorfizmu dwa zbiory otwarte* niepuste. Inaczej: są dokładnie dwa typy topologiczne wśród zbiorów otwartych niepustych zbioru Cantora.

---

[102] R.L. Moore: *Concerning simple continuous curves*. Trans. Amer. Math. Soc. 21 (1920), s. 333—347 (przypadek kontinuów metrycznych); A.D. Wallace: *Monotone transformations*. Duke Math. J. 9 (1942), s. 487—506.

[103] S. Eilenberg: *Sur les decompositions des continus en ensembles connexes*. Fund. Math. 22 (1934), s. 297—302.

Okazuje się, że — G. Gruenhage i A.H. Schoenfeld (1975) — *nie ma wśród przestrzeni zwartych metrycznych, poza przestrzenią dwupunktową i zbiorem Cantora, innych o tej własności*[104].

Oto szkic prowadzącego do tej konkluzji rozumowania.

Niech X będzie przestrzenią zwartą metryczną mającą więcej niż dwa punkty i mającą z dokładnością do homeomorfizmu dwa zbiory otwarte niepuste.

Z tego, że X ma więcej niż dwa punkty, wnioskujemy, że ma ich nieskończenie wiele. Jako przestrzeń zwarta musi mieć zatem punkty skupienia. Zawiera więc zbiory otwarte niezwarte (powstałe po usunęciu jednego punktu skupienia). Skoro są tylko dwa typy topologiczne, a jeden ze zbiorów otwartych — zbiór X — jest zwarty, to wszystkie zbiory otwarte niezwarte są ze sobą homeomorficzne. Wszystkie pozostałe zbiory otwarte są zwarte i są homeomorficzne z przestrzenią X. A oto, nietrudne do stwierdzenia, dalsze własności:

(15) *X nie ma punktów izolowanych*,

(16) *X zawiera zbiory otwarte niespójne*.

Wynika to z warunku T_2 z uwagi na to, że zbiór X ma nieskończenie wiele punktów. Zatem,

(17) *wszystkie zbiory otwarte niezwarte są niespójne*

(18) *X nie jest spójne*.

Jeśli byłoby spójne, to jako kontinuum miałoby, na mocy twierdzenia Moore'a, punkt nierozspajający. Usuwając ten punkt, dostalibyśmy zbiór spójny. Tymczasem jako zbiór otwarty (usunięty punkt nie jest izolowany (15) ten zbiór jest niespójny (17). Sprzeczność.

(19) *X jest całkowicie niespójne*.

Dla dowodu zauważmy, że składowe przestrzeni X nie mogą być d.-o, bo jako d.-o. byłyby homeomorficzne z niespójną — na mocy (18) — przestrzenią X. Zatem dopełnienia składowych przestrzeni X są homeomorficzne — wobec (17) — z dopełnieniami punktów (które nie są izolowane) wobec (15).

W dopełnieniu każdej składowej — która jest quasi-składową, bo przestrzeń X jest zwarta T_2 — każdy punkt ma otoczenie domknięto-otwarte w X — a więc zwarte — rozłączne z rozważaną składową. Stąd, w dopełnieniu każdego punktu, każdy inny punkt można od niego odzielić otoczeniem domknięto-otwartym w X. To dowodzi całkowitej niespójności przestrzeni X.

Wobec (15) i (19), przestrzeń X jest homeomorficzna ze zbiorem Cantora na mocy znanego twierdzenia charakteryzującego zbiór Cantora wśród przestrzeni metrycznych zwartych[105].

---

104 A.H. Schoenfeld, G. Gruenhage: *An alternate characterization of the Cantor set*. Proc. Amer. Math. Soc. 53 (1975), s. 235—236.

105 Por. przyp. na s. 32.

Na ten temat por. również pracę autora (1978) poświęconą przestrzeniom zwartym T_2 (niekoniecznie metrycznym), mającym dwa zbiory otwarte i niewyjaśnionym dotąd związkom z hipotezą Suslina[106]. Dalsze rozwinięcie tych problemów można znaleźć w pracy P. Nordena, S.P. Purisha i M. Rajagopalana (1996)[107], której autorzy rozważają również problem przestrzeni o jednym zbiorze otwartym.

Charakteryzacja topologiczna odcinka

Niech X będzie kontinuum T_1. Ustalmy punkt a w kontinuum X. Wyznaczamy tym samym uporządkowanie częściowe zbioru S punktów rozspajających kontinuum X: jeśli x i x' są różnymi od siebie punktami zbioru $S - \{a\}$, to przyjmujemy $x <_a x'$, jeśli istnieją odgałęzienia (poza a), V punktu x i V' punktu x' takie, że $\{x'\} \cup V' \subset V$.

Sprawdzenie, że jest to rzeczywiście uporządkowanie częściowe, polega na nietrudnym zastosowaniu lematu o odgałęzieniach.

Odnotujmy, że

Zbiory $P_x = \{y \in S : x <_a y\}$ *są zbiorami otwartymi topologii zbioru S dziedziczonej* z X. Wynika to stąd, że zbiory te są równe sumie zbiorów $S \cap V$, gdzie V są odgałęzieniami w punkcie x (poza a), które są otwarte w X.

Mówi się, że punkt x *rozspaja* kontinuum X *między punktami* a i b, jeśli istnieje rozpad $X - \{x\} = U \cup V$ taki, że $a \in U$ i $b \in V$. Precyzuje to pojęcie rozspajania: jeśli punkt rozspaja, to rozspaja między pewnymi punktami; zbiór $S(a, b)$ punktów rozspajających między a i b jest zawarty w zbiorze S wszystkich punktów rozspajających.

Lemat. *Niech a i b będą punktami kontinuum X klasy* T_1. *Zbiór* $S(a, b)$ *jest łańcuchem w zbiorze S uporządkowanym nierównościami* $<_a$ *i łańcuchem w zbiorze S uporządkowanym nierównościami* $<_b$. *Jest* $x <_a x' \Leftrightarrow x' <_b x$. *Topologia uporządkowania* $<_a$ *zbioru* $S(a, b)$ *jest zawarta w topologii dziedziczonej z X.*

Dowód. Niech x i x' będą dwoma punktami zbioru $S(a, b)$. Istnieją rozpady $X - \{x\} = U \cup V$ i $X - \{x'\} = U' \cup V'$, gdzie a należy do U i U' oraz b należy do V i V'. Ponieważ $V \cap V' \neq \emptyset$, a więc jest $\{x\} \cup V \subset V'$ lub $\{x'\} \cup V' \subset V$ (na mocy lematu o odgałęzieniach) zależnie od tego, czy $x \in V'$, czy $x' \in V$.

Jest więc $x <_a x'$ lub $x' <_a x$.

Uporządkowanie $<_b$ jest przeciwne do $<_a$. Istotnie, jeśli $x <_a x'$, gdzie x i x' należą do $S(a, b)$ (są więc różne także od b), to istnieją rozpady $X - \{x\} = U \cup V$ i $X - \{x'\} = U' \cup V'$ takie, że a należy do U i U', b należy do V i V' oraz $\{x'\} \cup V' \subset V$. Po przejściu do dopełnień dostajemy $\{x\} \cup U \subset U'$, co znaczy, że $x' <_b x$.

Zbiory $M_x = \{x' \in S(a, b) : x' <_a x\}$ i $N_y = \{x' \in S(a, b) : y <_a x'\}$ są, na mocy stwierdzenia, otwarte w topologii zbioru $S(a, b)$ dziedziczonej z X, bo $M_x = S(a, b)$

[106] J. Mioduszewski: *Compact Hausdorff spaces with two open sets*. Coll. Math. 39 (1978), s. 35—40.

[107] P. Norden, S.P. Purish, M. Rajagopalan: *Compact spoaces of diversity two*. Topology and its Appl. 70 (1996), s. 2—24.

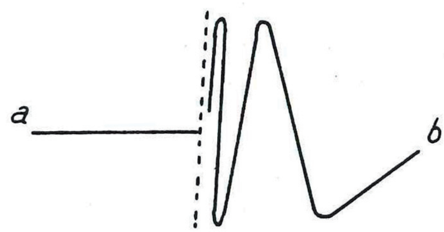
$\cap P_x$ i $N_y = S(a, b) \cap Q_y$, gdzie $P_x = \{x' \in S : x' <_a x\}$ i $Q_y = \{x' \in S : x' <_b y\}$.

Ponieważ zbiory M_x i N_y, gdzie x i y przebiegają zbiór $S(a, b)$, generują topologię uporządkowania $<_a$ zbioru $S(a, b)$, więc topologia ta zawiera się w topologii dziedziczonej z X.

Uporządkowanie zbioru $S(a, b)$ rozszerzamy do uporządkowania zbioru $S(a, b) \cup \{a, b\}$, przyjmując $a < x < b$ dla wszelkich x ze zbioru $S(a, b)$.

Topologia uporządkowania $<_a$ zbioru $S(a, b)$ jest na ogół mniejsza niż topologia dziedziczona z X.

Niech X będzie kontinuum, które składa się z: punktów sinusoidy zagęszczonej leżącej w półpłaszczyźnie $x \geqslant 0$, punktów odcinka $[-1, 1]$ osi y–ów i odcinka $[-1, 0]$ osi x-ów. Niech $a = (-1, 0)$ i niech b będzie najbardziej na prawo położonym punktem sinusoidy, rys. 32. Do zbioru $S(a, b)$ należą wszystkie punkty kontinuum X, z wyjątkiem punktów $(0, y)$, gdzie $y \neq 0$, oraz punktów a i b. Topologia uporządkowania zbioru $S(a, b)$ jest taka, jak topologia przedziału na prostej, bo uporządkowanie to jest ciągłe. Zbiory będące przekrojami ze zbiorem $S(a, b)$ krążków otwartych o środku $(0, 0)$ i o promieniu mniejszym niż 1 są otwarte w topologii dziedziczonej z X, nie będąc otwartymi w topologii uporządkowania $<_a$.



Rys. 32. Topologia uporządkowania zbioru $S(a, b)$ jest topologią przedziału (a, b)

L e m a t. *Jeśli wszystkie punkty, z wyjątkiem dwu punktów a, b, rozspajają kontinuum X klasy T_1, to każdy z punktów x różny od a i b rozspaja kontinuum X między a i b, co znaczy, że* $X = S(a, b) \cup \{a, b\}$.

D o w ó d. Jeśli x jest różne od a i b, to $X - \{x\} = U \cup V$, gdzie U i V są otwarte, niepuste i rozłączne. Na mocy wniosku z lematu o odgałęzieniach, w każdym ze zbiorów U i V są punkty, które nie rozspajają kontinuum X.

Ponieważ a i b są takimi punktami, więc jeden z tych punktów należy do U, a drugi do V, co znaczy, że x rozspaja między a i b.

T w i e r d z e n i e. *Jeśli wszystkie punkty, z wyjątkiem dwu punktów a i b, rozspajają kontinuum X klasy T_1, to topologia kontinuum X jest wyznaczona przez uporządkowanie; tym uporządkowaniem jest uporządkowanie $<_a$ zbioru* $S(a, b) \cup \{a, b\}$, *który jest w topologii tego uporządkowania kontinuum X; kontinuum X jest odcinkiem (uogólnionym) o końcach a i b.*

D o w ó d. Topologia uporządkowania $<_a$ zbioru $X = S(a, b) \cup \{a, b\}$ jest zawarta w topologii kontinuum X. Ale topologia uporządkowania jest T_2, a topologia kontinuum zwarta, zatem minimalna wśród topologii T_2 na tym kontinuum. Stąd obie topologie są równe.

Innym uporządkowaniem wyznaczającym topologię kontinuum X jest uporządkowanie przeciwne. Innego już nie ma (por. twierdzenie E i l e n b e r g a, por. *Wykład IV*).

Z dowiedzionego twierdzenia wnioskujemy[108], że *kontinuum klasy T_1 jest odcinkiem uogólnionym, jeśli jest rozspajane przez wszystkie punkty, z wyjątkiem dwu*, a więc klasyczne.

Twierdzenie Moore'a (1920)[109]. *Jeśli kontinuum klasy T_1 ośrodkowe jest rozspajane przez wszystkie punkty, z wyjątkiem dwu, to jest homeomorficzne z odcinkiem liczb rzeczywistych*.

Dowód. Niech X będzie kontinuum ośrodkowym klasy T_1 rozspajanym przez wszystkie punkty, z wyjątkiem dwu. Na mocy poprzedniego twierdzenia, topologia kontinuum X wyznaczona jest przez uporządkowanie. Wobec ośrodkowości, X zawiera zbiór D, gęsty i przeliczalny. Zbiór D dziedziczy z X uporządkowanie gęste, które, na mocy twierdzenia znanego Cantorowi (por. *Wykład I*), jest izomorficzne z uporządkowaniem zbioru liczb wymiernych na odcinku liczb rzeczywistych. Istniejący izomorfizm przedłuża się (twierdzenie Cantora, *Wykład I*) do izomorfizmu uporządkowania kontinuum X z uporządkowaniem odcinka. Jest to zapowiedziany homeomorfizm kontinuum X na odcinek.

Charakteryzacje topologiczne odcinka mają swą historię. Charakteryzacja Moore'a jest najbardziej znana; w *Topologie II* Kuratowskiego, s. 119, przypomniane są charakteryzacje Lennesa (1911), Sierpińskiego (1916) i Straszewicza (1918).

O charakteryzacjach topologicznych okręgu

Punkt nie rozspaja okręgu. Natomiast każda para punktów rozspaja okrąg.

Twierdzenie (R.L. Moore: *Concerning simple*..., loco cit.). *Kontinuum ośrodkowe T_1 rozspajane przez każdy zbiór dwupunktowy jest homeomorficzne z okręgiem*.

Dowód (por. Hall i Spencer, s. 172). Niech X będzie kontinuum spełniającym założenia. Zauważmy najpierw, że

(20) *kontinuum X nie jest rozspajane przez punkty.*

Istotnie, gdyby punkt a rozspajał X, to po jego usunięciu pozostałość rozpadłaby się na dwa zbiory otwarte U i V, które po dodaniu do nich tego punktu stałyby się kontinuami. W każdym z tych kontinuów jest, oprócz ewentualnie punktu a, jeszcze jeden punkt nierozspajający. Dostajemy w ten sposób parę punktów, która nie rozspaja X. Sprzeczność.

Niech teraz x i y będą dwoma dowolnymi punktami kontinuum X. Wobec założonej własności kontinuum, po ich usunięciu pozostałość rozpada się na dwa zbiory U i V otwarte i niepuste.

Jeden ze zbiorów, $U \cup \{x, y\}$ lub $V \cup \{x, y\}$, jest kontinuum (por. *Wykład IV*, końcowa uwaga na s. 56). Zauważmy zatem, że skoro jeden ze zbiorów jest kontinuum, to musi nim być i drugi, bo inaczej usunięcie z X jednego z punktów x lub y rozspoiłoby kontinuum X. Sprzeczność z (20).

[108] Zob. D. Wallace: *Monotone transformations*..., przypis 103.
[109] R.L. Moore: *Concernig simple*..., przypis 103.

Mamy zatem $X = A \cup B$, gdzie A i B są kontinuami dającymi w przekroju parę $\{x, y\}$.

Co najmniej jedno z kontinuuów, A lub B, jest łukiem. Inaczej, każde z nich miałoby, poza $\{x, y\}$, punkty nierozspajające. Para tych punktów nie rozspajałaby kontinuum X. Sprzeczność.

Ale skoro jedno z kontinuów jest łukiem, musi być łukiem i drugie, bo gdyby nie, to byłby na tym drugim punkt nierozspający, różny od x i y. Biorąc jakikolwiek różny od tych punktów punkt na kontinuum, które jest łukiem, dostalibyśmy parę punktów nierozspajających kontinuum X. Ta uwaga kończy dowód.

Następująca charakteryzacja okręgu pochodzi z prac J.R. Kline'a (1924) i R.L. Wildera (1931)[110].

Jeśli kontinuum metryczne wielopunktowe nie jest rozspajane przez żaden podzbiór spójny, to jest homeomorficzne z okręgiem.

Kuratowski (1924) dowiódł, że *jeśli w kontinuum metrycznym wielopunktowym po usunięciu jakiegokolwiek podkontinuum pozostaje ono semikontinuum, to jest ono homeomorficzne z okręgiem*[111].

Bing (1948) osłabił założenia Kuratowskiego, zakładając jedynie, że i kontinuum ma nie być rozspajane przez żadne podkontinuum i po usunięciu jakiegokolwiek punktu ma pozostać semikontinuum[112].

Odwzorowania otwarte odcinka

Podamy jeszcze jeden przykład zastosowania twierdzenia Moore'a.

Odwzorowanie ciągłe $f : X \to Y$ nazywane jest odwzorowaniem *otwartym*, jeśli przekształca zbiory otwarte na otwarte, tj. otwartość zbioru U w X implikuje otwartość jego obrazu $f(U)$ w Y.

Twierdzenie. *Obraz otwarty odcinka jest odcinkiem, jeśli jest klasy T_2.*

W dowodzie będziemy korzystać z następującego lematu o odwzorowaniach otwartych.

Lemat[113]. *Jeśli f jest odwzorowaniem ciągłym przestrzeni zwartej o własności T_2 i obraz zbioru otwartego U jest otwarty, to brzeg obrazu tego zbioru jest zawarty w obrazie jego brzegu*[114], $\partial f(U) \in f(\partial U)$.

---

[110] J.R. Kline: *Closed connected sets which remain connected upon removal of certain connected subsets*. Fund. Math. 5 (1924), s. 3—10; R.L. Wilder: *Concerning simple closed curves and related point sets*. Amer. J. Math. 53 (1931), s. 39—55.

[111] C. Kuratowski: *Contribution à l'étude de continus de Jordan*. Fund. Math. 5 (1924), s. 112—122. Przez semikontinuum rozumiemy zbiór, w którym każde dwa punkty w tej pozostałości dają się w niej połączyć za pomocą kontinuum.

[112] R.H. Bing: *Some characterizations of arcs and simple closed curves*. American Journal of Mathematics, 70 (1948), s. 497—506. Collected Papers, s. 597—606.

[113] G.T. Whyburn: *Analytic Topology...*, s. 184. Zamieszczone tu dowody powstały z rozmów z J. Krzempkiem, który podał — jeszcze inny — dowód twierdzenia bez korzystania z twierdzenia Moore'a.

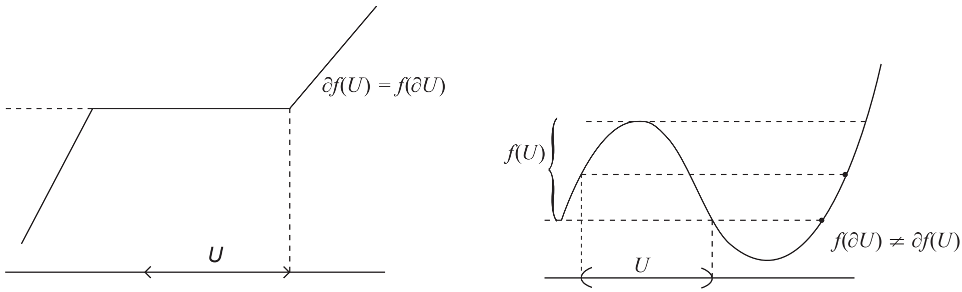
[114] W przeprowadzanym dowodzie symbolem ∂A oznaczony jest brzeg zbioru A, tj. przekrój domknięcia zbioru A z domknięciem jego dopełnienia. Jeśli A jest zbiorem otwartym, to ∂A jest domknięciem zbioru A pomniejszonym o sam zbiór A.

Dowód. Niech f będzie odwzorowaniem ciągłym przestrzeni zwartej X w przestrzeń Y o własności T_2. Niech U będzie otwarte w X i takie, że $f(U)$ jest otwarte w Y. Niech y będzie punktem brzegu obrazu $f(U)$ zbioru U. Wobec otwartości $f(U)$, wartość $f(y)$ nie należy do $f(U)$. Stąd,

(a) U i przeciwobraz punktu y są rozłączne.

Ponieważ Y jest przestrzenią T_2, więc y jest jedynym punktem w przekroju domknięć swych otoczeń. W rezultacie jest przekrojem przeciwobrazów tych wszystkich otoczeń. Ale każde otoczenie W punktu y przecina $f(U)$, co znaczy, że $U \cap f(W)$ jest niepuste dla każdego wspomnianego W. Zatem, wobec zwartości X, wnosimy, że

(b) przekrój domknięcia zbioru U z przeciwobrazem punktu y jest niepusty,



Rys. 33. Odwzorowania nieotwarte

Ze związków (a) i (b) wnioskujemy, że brzeg zbioru U i przeciwobraz punktu y przecinają się, co znaczy, że punkt y należy do obrazu brzegu zbioru U. Zatem $\partial f(U) \cup f(\partial U)$, bo y było wzięte dowolnie w zbiorze $\partial f(U)$.

Dowód twierdzenia. Niech f będzie odwzorowaniem odcinka [0, 1] na przestrzeń Y (klasy T_2). Niech a i b będą dwoma (różnymi) punktami nierozspajającymi przestrzeni Y.

Składowe dopełnienia przeciwobrazów punktów a i b przedziałami odcinka [0, 1]. Niech więc przedział W będzie składową przeciwobrazu punktu a. Obraz brzegu składowej W składa się z jednego punktu a. Zatem, na mocy lematu, brzeg obrazu $f(W)$ składowej W redukuje się do punktu a. Ponieważ punkt a nie rozspaja przestrzeni Y, więc $f(W) = Y - \{a\}$. Zatem b należy do $f(W)$.

Dotyczy to dowolnej składowej W, skąd, wobec ciągłości f, wnosimy, że składowych W jest skończenie wiele, i że przeciwobrazy punktów a i b są skończone i przedzielają się nawzajem.

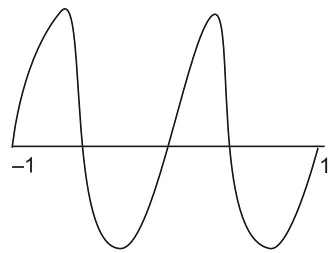
Wartości odwzorowania f w końcach odcinka są równe bądź a, bądź b.

Istotnie, weźmy pod uwagę koniec 0. Niech x^* będzie najbliższym temu końcowi punktem z przeciwobrazów punktów a i b. Niech przy tym $f(x^*) = a$. Odcinek $W = [0, x^*)$ jest jedną ze wspomnianych składowych, a punkt x' — jednym z punktów przeciwobrazu punktu a. Obraz $f(W)$ zbioru W jest otwarty. Zatem, na mocy lematu, brzeg jego obrazu zawiera się w obrazie brzegu zbioru W, a więc redukuje się do wartości $f(x')$, tj. do punktu a.

Stąd, jak poprzednio, $f(W) = Y - \{a'\}$. Zatem, na W musi się znaleźć punkt t, dla którego $f(t) = a$. Tym punktem, wobec założeń co do [0, x”), może być jedynie punkt 0.

Niech teraz c będzie punktem przestrzeni Y różnym od a i b. Pokażemy, że c rozspaja Y. Istotnie, gdyby tak nie było, to powtarzając poprzednie rozumowanie dla pary punktów nierozspajających c i (na przykład) a, mielibyśmy c równe $f(0)$ lub $f(1)$, a więc równe a lub b. Sprzeczność.

Pokazaliśmy w ten sposób, że poza a i b nie ma innych punktów nierozspajających. Stąd, na mocy twierdzenia Moore'a, kontinuum Y jest homeomorficzne z odcinkiem.



Rys. 34. Odwzorowanie otwarte odcinka.

Łatwo jest teraz dopowiedzieć, że *odwzorowanie otwarte odcinka rzeczywistego na odcinek jest kawałkami ściśle monotoniczne z równymi sobie maksimami i równymi sobie minimami, przyjmowanymi na końcach odcinków monotoniczności*.

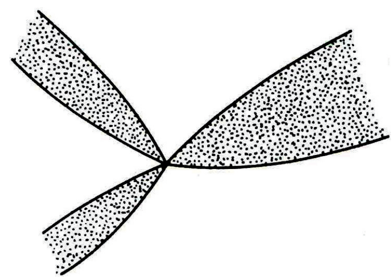
Odwzorowania otwarte odcinka na odcinek można zrealizować jako *wielomiany Czebyszewa*:

$$W_n(x) = \cos(n \arccos x), \qquad n \text{ całkowite},$$

które przekształcają odcinek $[-1, 1]$ na siebie*.

Punkty rozgałęzienia

Niech X będzie kontinuum T_1. Niech $x \in X$. Jeśli istnieją więcej niż dwa zbiory domknięto–otwarte rozłączne niepuste w $X - \{x\}$, to zbiór $X - \{x\}$ ma więcej niż jeden rozpad; punkt x nazywany jest wtedy punktem *rozgałęzienia*[115].



Rys. 35. Punkt rozgałęzienia

Punkty rozgałęzienia są raczej wyjątkowymi w kontinuach.

Lemat. *Jeśli x, y i z są punktami kontinuum X klasy T_1, to istnieje nie więcej niż jeden punkt rozspajający kontinuum X między każdymi dwoma punktami trójki $\{x, y, z\}$, tj. nie więcej niż jeden punkt t taki, że $X - \{t\} = U \cup V \cup W$, gdzie U, V i W są otwarte i rozłączne oraz $x \in U$, $y \in V$ i $z \in W$.*

* Na temat odwzorowań otwartych por. tytuł przeglądowy: L.F. McAnley: *Open mapping and open problems*. Top. Cont., Arizona State Univ., 1967.

[115] Nie powinno się mylić punktów rozgałęzienia w sensie tu podanym z punktami rzędu $\geqslant 3$, które — na mocy określenia — mają dowolnie małe otoczenia o brzegach mających trzy punkty lub więcej.

D o w ó d. Jeśliby t' było jeszcze jednym tego rodzaju punktem, to należałoby do jednego ze zbiorów U, V lub W. Jeśliby $t' \in U$, to t' nie mogłoby rozspajać między y i z, bo punkty te należą do kontinuum $V \cup \{t\} \cup W$ omijającego punkt t'.

Twierdzenie. *Moc zbioru punktów rozgałęzienia kontinuum T_1 nie przekracza jego stopnia ośrodkowości.*

Dowód. Niech X będzie kontinuum T_1 i niech D będzie jego podzbiorem gęstym. Niech a będzie ustalonym punktem w zbiorze R punktów rozgałęzienia kontinuum X. Każdej parze $\{x, y\}$ punktów ze zbioru D przyporządkujmy punkt b w zbiorze R rozspajający między każdą parą trójki $\{a, x, y\}$; jeśli takiego punktu nie ma, to przyporządkujmy parze $\{x, y\}$ punkt a. Poprawność określenia tego przyporządkowania wynika z lematu. Każdy punkt zbioru R przyporządkowany jest pewnej parze ze zbioru D; istotnie, jeśli $b \in R$, to $X - \{b\} = U \cup V \cup W$, gdzie U, V i W są otwarte i niepuste; jeśli $a \in U$, to biorąc w zbiorach V i W po jednym punkcie ze zbioru D, dostajemy parę, której przyporządkowany jest punkt b. Widzimy więc, że moc $R \leqslant$ moc $(D \times D)$ = moc D.

Wniosek. *Jeśli kontinuum klasy T_1 jest ośrodkowe, to zbiór jego punktów rozgałęzienia jest co najwyżej przeliczalny*[116].

Lemat Janiszewskiego

Po usunięciu punktu przestrzeń spójna może stać się dziedzicznie niespójna (miotełka Knastera—Kuratowskiego), a nawet całkowicie niespójna (por. konstrukcje z *Wykładu III*). Nie może się to zdarzyć w zakresie kontinuów. Wynika to bezpośrednio z następującego twierdzenia, które będzie miało, niezależne od tego, znaczenie dla dalszego ciągu wykładów.

Lemat Janiszewskiego[117]. *Niech X będzie kontinuum klasy T_2. Jeśli U jest podzbiorem otwartym niepustym kontinuum X, różnym od całości, i A jest składową zbioru U, to jej domknięcie* cl$A$ *ma punkty poza U.*

Bardziej obrazowe sformułowanie: *w kontinuach składowe zbiorów otwartych dochodzą do brzegu*. Jest znana również wersja lematu Janiszewskiego ze zbiorem domkniętym zamiast otwartego (por. Kuratowski: *Topologie II*, s. 112), mająca podobne znaczenie.

Dowód. Przypuśćmy, że domknięcie składowej A zbioru U jest zawarte w U; wtedy A jest domknięte w X. Kontinuum X, będąc klasy T_2, jest przestrzenią normalną. Niech V będzie zbiorem otwartym zawierającym A i zawartym wraz ze swym domknięciem w U. Zbiór A jest zatem składową domknięcia zbioru V. Zbiór A jest więc quasi-składową domknięcia zbioru V, na mocy twierdzenia

116 Twierdzenia o przeliczalności zbioru punktów rozgałęzienia można znaleźć w Menger: *Kurventheorie*, s. 164, a także w G.T. Whyburna: *Analytic Topology*..., s. 61, i w C. Kuratowski: *Topologie II*, 46, VI, s. 223.

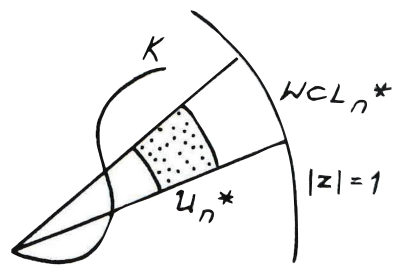
117 Z. Janiszewski: *Thèse*. Paris 1911, s. 45; „Oeuvres choisies", s. 77; Bull. Acad. Sc. Cracovie 12 (1912), s. 907; „Oeuvres choisies", s. 133.

z *Wykładu III* istnieje zatem podzbiór d.-o. W domknięcia zbioru V, który jest zawarty w V (wynika to ze zwartości zbioru $X{-}V$ i tego, że quasi-składowa A jest zawarta w V). Zbiór W, jako domknięty w domknięciu zbioru V, jest domknięty w X, a jako otwarty w domknięciu zbioru V i zawarty w V jest otwarty w V, a więc otwarty w X. Jest zatem zbiorem d.-o. w X, niepustym (bo zawierającym A) i różnym od całości (bo zbiór V, w którym jest zawarty, jest różny od całości). Sprzeczność ze spójnością X.

Z lematu Janiszewskiego wynika, że *wśród przestrzeni zwartych T_2 nie ma przestrzeni dwuspójnych*.

Istotnie, z *Wykładu III*, s. 58, wiemy, że przestrzeń dwuspójna nie zawiera podzbiorów spójnych wielopunktowych rozłącznych. Tymczasem w każdym kontinuum wielopunktowym T_2 tego rodzaju dwa podzbiory zawsze się znajdą: wystarczy wziąć dwa zbiory U i V, otwarte, rozłączne, niepuste, i składowe tych zbiorów, jedną zbioru U, drugą zbioru V. Na mocy lematu Janiszewskiego te składowe dochodzą do brzegów U i V; są więc wielopunktowe i, oczywiście, rozłączne.

Lemat Janiszewskiego ma udział w dowodzie twierdzenia będącego w paraleli do znanego z teorii miary twierdzenia Steinhausa, które w odniesieniu do zbiorów płaskich głosi, że *zbiór różnic $x - y$ między punktami x i y zbioru miary dodatniej zawiera zbiór otwarty niepusty*[118].



Rys. 36. Zbiór K—K i segmenty kątowe w nim zawarte

Twierdzenie (Kallman, Simmons, 1985). *Zbiór różnic między punktami nieleżącego na jednej prostej kontinuum płaskiego zawiera zbiór otwarty niepusty*[119].

W dowodzie skorzystamy z twierdzenia Levy'ego o cięciwach, które głosi, że *jeśli p i q są punktami kontinuum płaskiego, to dla każdej liczby r, $0 < r \leqslant 1$, istnieją punkty x i y tego kontinuum takie, że $x - y = r(p - q)$ bądź $x - y = (1 - r)(p - q)$; znaczy to istnienie dla tego kontinuum cięciw xy równoległych do cięciwy pq, której długość jest r-tą bądź $(1 - r)$-tą długości cięciwy pq*[120].

Redukcja dowodu. Niech K będzie kontinuum płaskim nieleżącym na prostej. Zauważmy, że istnieje wtedy na kontinuum K punkt p i składowa zbioru

[118] H. Steinhaus: *Sur les distances des points des ensembles de mesure positive*. Fund. Math. 1 (1920), s. 99—104. Twierdzenie Steinhausa dotyczy zbiorów na prostej; na wyższe wymiary zostało przeniesione przez Hadwigera; H. Hadwiger: *Erweiterung eines Theoremes von Steinhaus–Rademacher*. Comm. Helv. Mathem. 19 (1946), s. 236—239.

[119] R.R. Kallman, F.W. Simmons: *A theorem on planar contnua and an application to automorphisms of the field of complex numbers*. Topology and Appl. 20 (1985), s. 251—255.

[120] Przez *cięciwę* zbioru rozumiemy odcinek o końcach w tym zbiorze, B. Levy (1934). Twierdzenie wraz z dowodem można znaleźć w pracy L.A. Lusternika: *Wypukłyje figury i mnogogranniki*. Moskwa 1956; przytoczone jest przez autora w *Wykładach z topologii, Topologia przestrzeni euklidesowych*. Katowice 1994. Dowód dla kontinuów będących łukami, por. D. Rolfsen: *Knots and links*. Berkeley 1976, s. 16.

$K - \{p\}$, która nie leży na jednej prostej. Punkt p, na mocy lematu Janiszewskiego, leży w domknięciu tej składowej. To domknięcie jest kontinuum wielopunktowym nieleżącym na żadnej prostej. Oczywiście, punkt p nie rozspaja tego kontinuum[121].

Twierdzenia wystarczy więc dowieść dla kontinuów (płaskich) nieleżących na prostej i nierozspajanych chociażby przez jeden punkt.

Niech więc K będzie tego rodzaju kontinuum i niech p będzie punktem tego kontinuum, który go nie rozspaja. Przyjmijmy — co nie zmniejsza ogólności — że $p = 0$.

Dowód twierdzenia. Ustalmy q w zbiorze $K - \{0\}$. Dla każdego r, $0 < r \leqslant 1$, co najmniej jedna z liczb zespolonych rq bądź $(r - 1)q$ jest jest równa pewnej różnicy $x - y$, gdzie x i y należą do K; znaczy to, że na promieniu wychodzącym z punktu $p = 0$ i przechodzącym przez q leżą punkty zbioru K—K.

W rzeczywistości tych punktów jest znacznie więcej. Na promieniu przechodzącym przez punkt q jest cały przedział punktów złożonych z elementów zbioru k—K. Jest tak dlatego, bo zbiór punktów rq należących do K—K takich, że O $< 2 \leqslant \frac{1}{2}$, jest domknięty (co wynika ze zwartości zbioru K—K). Dotyczy to również zbioru punktów rq, gdzi $\frac{1}{2} \leqslant$ r $\leqslant 1$. Co najmniej jeden z tych zbiorów zawiera przedział (alternatywa dotyczy każdej pary odcinków symetrycznie położonych wokół $\frac{1}{2}$).

Niech $f(z) = \frac{z}{|z|}$ będzie retrakcją zbioru K—$\{O\}$ na okrąg $|z| = 1$. Obraz f jest łukiem na $|z| = 1$ nieredukującym się do punktu (bo K nie leży na żadnej prostej). Przedział leżący na promieniu przechodzącym przez q — istniejący na mocy poprzedniej uwagi — można zawsze zapisać w postaci zU, gdzie U jest odpowiednim przedziałem zbioru liczb rzeczywistych, gdzie przez zU rozumiemy zbiór złożony z elementów αz, gdzie α należy do U.

Niech $U_1, U_2, \ldots$ stanowią bazę zbiorów otwartych na prostej. Niech L_n będzie zbiorem tych punktów z zbioru $f(K - \{0\})$, dla których zbiór zU_n jest zawarty w K—K. Na mocy poczynionych już uwag, każdy punkt zbioru $f(K - \{0\}$ leży w pewnym L_n. Zbiory L_n są zwarte, co wynika ze zwartości zbioru $K - K$ (rozbicie zbioru K—K promieniami wychodzącymi z 0 jest rozbiciem półciągłym górnie).

Z twierdzenia Baire'a wynika, że jeden ze zbiorów L_n — niech będzie to zbiór L_{n*} — ma wnętrze niepuste. Niech W będzie przedziałem zawartym w tym zbiorze. Segment zU_{n^*}, gdzie $z \in W$, jest zbiorem otwartym niepustym zawartym w K—K; por. rys. 36.

Twierdzenie Sierpińskiego

Lemat. *Jeśli kontinuum klasy T_2 jest rozbite na co najmniej dwa zbiory domknięte, to dla każdego ze zbiorów rozbicia zawiera ono kontinuum rozłączne*

[121] Istnienie w tym kontinuum punktu nierozspajającego dostaliśmy bez powoływania się na twierdzenie Moore'a.

z tym zbiorem i przecinające co najmniej dwa inne zbiory rozbicia, z których jeden może być ustalony z góry.

Dowód. Niech M i N będą zbiorami rozważanego rozbicia. Wobec normalności istnieją zbiory otwarte U i V, rozłączne i takie, że $M \subset U$ i $N \subset V$. Niech C będzie składową zbioru V mającą punkty w zbiorze N. Wobec lematu Janiszewskiego, składowa C dochodzi do brzegu zbioru V. Jej domknięcie jest kontinuum wielopunktowym rozłącznym z M i przecinającym N. Kontinuum to, mając punkty na brzegu (gdzie nie ma punktów zbioru N), przecina jeszcze co najmniej jeden element rozważanego rozbicia.

Lemat ten jest istotą następującego twierdzenia[122]

Twierdzenie Sierpińskiego (1918). *Kontinuum klasy T_2 nie można rozbić na przeliczalnie wiele podzbiorów domkniętych.*

Dowód[123]. Niech X będzie kontinuum wielopunktowym T_2 i niech $X_1, X_2, \ldots$ będą zbiorami ustalonego rozbicia tego kontinuum na zbiory domknięte. Na mocy lematu kontinuum X zawiera podkontinuum K_1 takie, że $K_1 \cap X_1 = \emptyset$, które przecina jeszcze co najmniej dwa inne zbiory rozbicia. Stosując to postępowanie do K_1 w miejscu X i do rozbicia złożonego ze zbiorów $X_j \cap K_1$, dostajemy kontinuum wielopunktowe K_2, $K_2 \subset K_1$, takie, że $K_2 \cap X_2 = \emptyset$ (lemat jest niepotrzebny, jeśli $X_2 \cap K_1 = \emptyset$). Postępując tak dalej, dostajemy (przez indukcję) ciąg podkontinuów wielopunktowych $K_1 \supset K_2 \supset \ldots$ kontinuum X takich, że $K_n \cap X_m = \emptyset$ dla $m \leqslant n$. Przekrój kontinuów K_n jest zbiorem niepustym rozłącznym z każdym ze zbiorów X_n. Sprzeczność.

Nie można w tym twierdzeniu wyjść poza kontinua. Są zbiory spójne niezwarte, które można rozbić na przeliczalnie wiele zbiorów domkniętych, nawet spójnych. Przykład — płaski, niedomknięty — podał Sierpiński (1919)[124], wskazując, że uzyskane rozbicie przenosi się na rozbicie wykresu funkcji rzeczywistej nieograniczonej nad tym zbiorem. Wykres ten jest podzbiorem domkniętym w przestrzeni i spójnym.

Gary Gruenhage dowiódł, że w pewnym wariancie ZFC (równie niesprzecznym co ZFC) przestrzeń $E3$ daje się rozbić na mniej niż continuum łuków[125]. Nie posługując się hipotezą continuum – środkami ZFC – Howard Cook dowiódł, że rozbicie płaszczyzny na łuki ma zawsze continuum elementów. Jeśli elementy rozbicia są łamanymi, rzecz jest oczywista[126].

---

[122] W. Sierpiński: *Un thèoréme sur les continus*. Tˆohoku Math. J. 3 (1918), s. 300—303; w *Oeuvres choisies* II w tomie, s. 268—271.

[123] Por. dowodu ? Kerekjarty: *???*..., s. 38.

[124] Przytoczony w C. Kuratowski: *Topologie II*, s. 115.

[125] G. Gruenhage: *R^3 can be the union of fewer that 2^ω many disjoint arcs*. 6th Summer Topology Conference, Ann. of New York Acad. Sci. 659 (1992), s. 86—89.

[126] H. Cook: Anons w Notices Amer. Math. Soc. 26 (1979), A-637; oraz notatka do Problemu 97 w „Continua with the Houston Problem Book" — New York — Basel, Hong Kong 1975, na s. 381.

Nie byłoby problemu, jeśliby rozbicie było półciągłe górnie[127]. Ale, jak dowiódł Roberts (1936), płaszczyzny nie można rozbić w sposób półciągły górnie na łuki — por. przegląd rozwoju teorii kontinuów J.J. Charatonika.

---

[127] Rozbicie jest *półciągłe górnie*, jeśli suma elementów rozbicia przecinających zbiór domknięty jest zbiorem domkniętym. Półciągłość górna rozbicia zapewnia (przy założeniu, że przestrzeń jest zwarta T_2) zachowanie własności T_2 przy przejściu do obrazu, jakim jest przestrzeń ilorazowa. Obraz jest więc kontinuum wielopunktowym klasy T_2, zatem mocy nie mniejszej niż c.

Wykład VI. Lokalna spójność w zakresie kontinuów

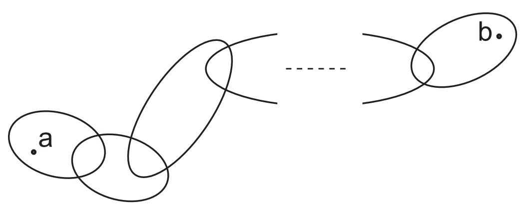
∗ Twierdzenia Wildera ∗ Kontinua lokalnie spójne ∗ Twierdzenie Mazurkiewicza—Moore'a ∗ Kontinua lokalnie łukowo-spójne ∗ Twierdzenie Hahna—Mazurkiewicza ∗ Własność (S) Sierpińskiego ∗ Jeśli kontinuum nie jest lokalnie spójne

Pojęcie lokalnej spójności nabiera specyficznego geometrycznego znaczenia, jeśli się je odniesie do kontinuów. Będzie to przedmiotem tego wykładu, z tym że nie będziemy w nim wychodzić poza kontinua metryczne, w którym to zakresie problemy mają pewne zamknięcia. Kontinuom niemetrycznym poświęcony będzie wykład następny. Zaczynamy wszakże od pewnego przygotowania ogólnego.

Przypomnijmy, że w przestrzeni lokalnie spójnej każde otoczenie każdego punktu zawiera *obszar*, tj. zbiór otwarty spójny, będący otoczeniem tego punktu; obszary stanowią tezę topologii przestrzeni.

Twierdzenia Wildera

Niech a i b będą punktami przestrzeni. Przez *łańcuch od a do b* rozumiemy łańcuch $\{U_1,..., U_n\}$ złożony z podzbiorów tej przestrzeni taki, że $a \in U_1$ i $b \in U_n$.



Rys. 37. Łańcuch od a do b

Lemat (o istnieniu łańcucha). *Niech X będzie przestrzenią spójną, niech $\mathcal{P}$ będzie jej pokryciem zbiorami otwartymi i niech a i b będą punktami przestrzeni X. Istnieje łańcuch od a do b złożony z elementów pokrycia $\mathcal{P}$.*

Dowód. Niech A będzie zbiorem wszystkich punktów przestrzeni X, które można połączyć z punktem a łańcuchem o ogniwach należących do pokrycia $\mathcal{P}$.

Zbiór A jest otwarty. Istotnie, jeśli $x \in A$, to istnieje łańcuch $\{U_1,..., U_n\} \subset \mathcal{P}$ taki, że $a \in U_1$ i $x \in U_n$. Każdy punkt y zbioru otwartego U_n można również połączyć z a łańcuchem o ogniwach z $\mathcal{P}$, mianowicie łańcuchem $\{U_1,..., U_n\}$. Znaczy to, że każdy punkt y z otoczenia otwartego U_n należy do A.

Zbiór A jest domknięty. Istotnie, niech x będzie punktem skupienia zbioru A. Niech U będzie elementem pokrycia $\mathcal{P}$ takim, że $x \in U$. Niech y będzie punktem zbioru $A \cap U$. Ponieważ y należy do A, więc istnieje łańcuch $\{U_1,..., U_n\}$ o ogniwach należących do $\mathcal{P}$ taki, że $a \in U_1$ i $y \in U_n$. Ciąg $\{U_1,..., U_n, U\}$ zawiera łańcuch łączący x z a. Łańcuchem tym jest ciąg $\{U_1,..., U_k, U\}$, gdzie k jest najmniejszym wskaźnikiem takim, że $U \cap U_k \neq \emptyset$, po ewentualnym odrzuceniu ogniwa U, jeśli $x \in U_k$.

Zbiór A, jako domknięto-otwarty i niepusty (punkt a należy do A), jest więc równy, wobec spójności X, całemu zbiorowi X. Znaczy to, ża każdy punkt zbioru X można połączyć z punktem a łańcuchem o ogniwach należących do $\mathcal{P}$.

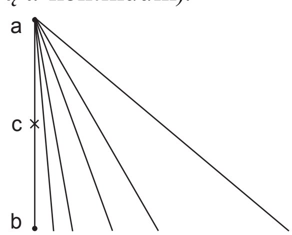
Twierdzenie Wildera (1927)[128]. *W przestrzeni regularnej i lokalnie spójnej każde dwa punkty obszaru dają się w tym obszarze połączyć zbiorem domkniętym spójnym.*

Dowód. Niech G będzie obszarem przestrzeni regularnej i lokalnie spójnej X. Każdy punkt x obszaru G ma otoczenie otwarte i spójne U, które wraz domknięciem zawarte jest w G. Zbiory U razem pokrywają obszar G. Niech a i b będą punktami tego obszaru. Na mocy lematu, istnieje łańcuch od a do b złożony ze wspomnianych zbiorów. Suma domknięć elementów tego łańcucha jest zbiorem domkniętym w X, spójnym i łączącym w obszarze G punkty a i b.

Założenia lokalnej spójności nie można opuścić, nawet jeśli X jest metryczne.

Przykład. Po wyjęciu punktu c z wnętrza odcinka zagęszczenia miotełki na rys. 38 pozostanie zbiór spójny, a więc obszar. Punktów a i b nie da się poza c połączyć zbiorem domkniętym spójnym (tj. za pomocą a kontinuum).

Jeśli dodać założenie lokalnej zwartości, to zbiór domknięty konstruowany w dowodzie twierdzenia Wildera okaże się zwarty, tj. okaże się kontinuum. Przestrzenie, w których każde dwa punkty można połączyć za pomocą kontinuum, są nazywane *semikontinuami*. Używając tego terminu, poprzedniej uwadze można nadać następującą formę: *Obszary przestrzeni lokalnie zwartej T_2 i lokalnie spójnej są semikontinuami.*



Rys. 38. Obszar w przestrzeni wielokrotnie spójnej

L. Mohler (1970) dowiódł, że *jeśli w przestrzeni metrycznej, ośrodkowej i lokalnie zwartej wszystkie jej obszary są semikontinuami, to przestrzeń jest lokalnie spójna* (odpowiedź twierdząca na pytanie Knastera (1937). W zakresie kontinuów niemetrycznych twierdzenie przestaje być prawdziwe[129].

---

[128] R.L. Wilder: *The non-existence of a certain type of regular point set*. Bull. Amer. Math. Soc. 33 (1927), s. 439—446.

[129] L. Mohler: *A characterization of local connectedness for generalized continua*. Coll. Math. 21 (1970), s. 81—85; *A counterexample in non–metric continua theory*. Coll Math 48 (1984), s. 209—212.

Przestrzeń jest *lokalnie ośrodkowa*, jeśli każdy jej punkt ma otoczenie ośrodkowe. Lokalna ośrodkowość nie implikuje ośrodkowości, nawet jeśli przestrzeń jest metryczna (przestrzenie dyskretne), a także gdy przestrzeń jest spójna (długa prosta). Ale *przestrzeń metryczna, spójna i lokalnie ośrodkowa jest ośrodkowa*[130].

Założenie metryczności można osłabić do *parazwartości*, co jest wskazówką dla dowodu[131].

Kontinua lokalnie spójne

Najprostszymi kontinuami lokalnie spójnymi są odcinki prostej rzeczywistej, a także odcinki uogólnione. Odcinki są nieprzywiedlne między swymi końcami.

Twierdzenie. *Kontinuum lokalnie spójne T_2 nieprzywiedlne między dwoma punktami jest odcinkiem uogólnionym (metrycznym, jeśli kontinuum jest metryczne).*

Dowód. Niech X będzie kontinuum T_2, lokalnie spójnym i nieprzywiedlnym między punktami a i b. Każdy punkt x różny od a i b to x rozspaja między a i b, bo w przeciwnym razie, na mocy lematu Wildera, istniałoby kontinuum omijające x łączące punkty a i b, co jest niemożliwe wobec nieprzywiedlności X. Wobec twierdzeń Moore'a i Wallace'a (*Wykład IV*) kontinuum X jest odcinkiem uogólnionym; rzeczywistym, jeśli X jest ośrodkowe.

Ponieważ odcinki, także uogólnione, są nieprzywiedlne i lokalnie spójne, więc dostaliśmy jeszcze jedną charakteryzację topologiczną odcinków uogólnionych. W szczególności, *kontinuum T_2 jest homeomorficzne z odcinkiem prostej rzeczywistej, jeśli jest ośrodkowe, lokalnie spójne i nieprzywiedlne między pewnymi dwoma punktami*.

Kontinuum nazywane jest *dziedzicznie lokalnie spójnym*, jeśli każde jego podkontinuum jest lokalnie spójne. Z ostatnio dowiedzionego twierdzenia i twierdzenia o istnieniu kontinuów nieprzywiedlnych (*Wykład IV*, s. 67) dostajemy:

Wniosek. *Każde dwa punkty kontinuum dziedzicznie lokalnie spójnego T_2 można w tym kontinuum połączyć łukiem (łukiem rzeczywistym, jeśli kontinuum jest metryczne).*

Odnotujmy, na razie bez dowodu, że *kontinuum metryczne lokalnie spójne, w którym każde kontinuum nieprzywiedlne jest łukiem, jest dziedzicznie lokalnie*

---

130 W. Sierpiński: *Sur les espaces metriques localement separables*. Fund. Math. 21 (1933), s. 107—113; Oeuvres choisies III, s. 148—153; por. także P.S. Aleksandrow: *Über die Metrization der im Kleinen kompakten topologischen Räume*. Math. Ann. 92 (1924), s. 294—301; *Izbrannyje trudy. Tieoria funkcji diejstwitielnogo pieriemennogo i tieoria topołogiczeskich prostranstw.* Moskwa 1978, s. 95—104.

131 R. Engelking: *Topologia ogólna*, s. 332; 4.4.F. (c). Przestrzeń topologiczna nazywana jest *parazwartą*, jeśli w każde jej pokrycie zbiorami otwartymi można wpisać *pokrycie lokalnie skończone*; przez *rodzinę* zbiorów *lokalnie skończoną* rozumie się rodzinę zbiorów taką, że każdy punkt przestrzeni ma otoczenie przecinające jedynie skończenie wiele zbiorów tej rodziny.

spójne (Kline, 1927)[132]. Założenia lokalnej spójności kontinuum nie można opuścić, przykładem jest tu miotełka z rys. 38.

Początkowo dość trudno o przykłady kontinuów dziedzicznie lokalnie spójnych innych niż łuki i grafy. Wrócimy do tego tematu w końcu wykładu.

Twierdzenie Mazurkiewicza—Moore'a

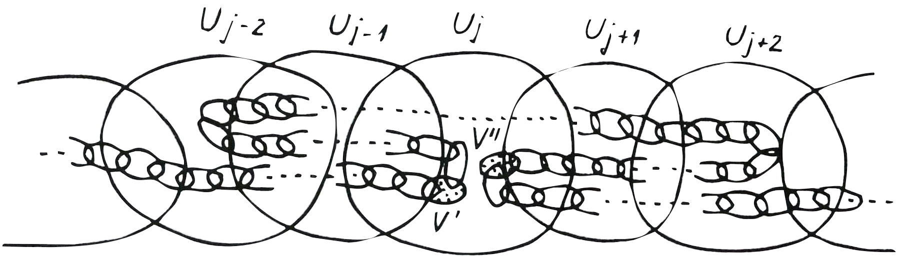
Kontinuum, w którym każde dwa punkty można połączyć łukiem, jest nazywane *łukowo spójnym*. Dowiedliśmy wcześniej, że *kontinua T_2 dziedzicznie lokalnie spójne są łukowo spójne*. Okaże się, że jeśli kontinuum jest metryczne, wystarczy założyć lokalną spójność samego kontinuum. Przystępujemy do dowodu tego ważnego twierdzenia teorii kontinuów.

Oto (niewymagająca dowodu) specjalizacja lematu o istnieniu łańcuchów.

Lemat. *Niech G będzie obszarem kontinuum metrycznego lokalnie spójnego i niech a i b będą punktami tego obszaru. Niech* $\varepsilon > 0$. *Istnieje łańcuch* $\mathcal{U} = \{U_1,..., U_n\}$ *od a do b złożony z obszarów, których domknięcia* cl U_i *są zawarte w G i których średnica jest* $\leqslant \varepsilon$.

Powiemy, że łańcuch $\mathcal{V}$ jest *wpisany* w łańcuch $\mathcal{U}$, jeśli każde ogniwo łańcucha $\mathcal{V}$ jest zawarte w pewnym ogniwie łańcucha $\mathcal{U}$.

Powiemy, że łańcuch $\mathcal{V}$ jest wpisany w łańcuch $\mathcal{U}$ *bez istotnych sfałdowań* jeśli V jest wpisane w $\mathcal{U}$, jeśli dla każdego odcinka $\{V_k,..., V_l\}$ łańcucha $\mathcal{V}$, którego pierwsze ogniwo V_k zawarte jest w U_i, a ostatnie V_l — w U_j, suma ogniw tego odcinka nie przecina się z ogniwem U_{i-3} i z żadnym ogniwem wcześniejszym, oraz nie przecina się z ogniwem U_{j+3} i z żadnym ogniwem późniejszym.

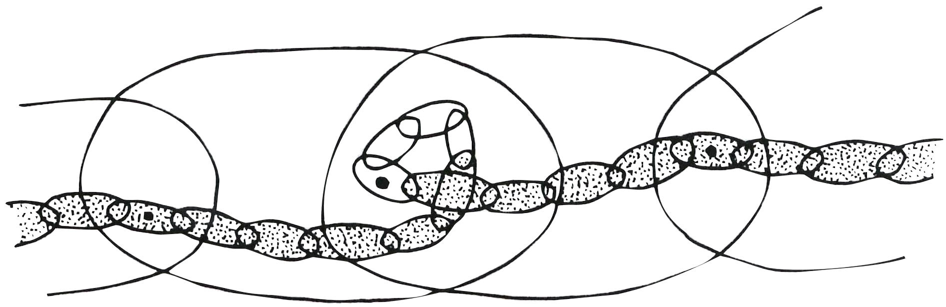


Rys. 39. Łańcuch $\mathcal{V}$ wpisany w łańcuch $\mathcal{U}$ bez istotnych sfałdowań. Ogniwa $\mathcal{V}$' i $\mathcal{V}$'' są zawarte w jednym ogniwie łańcucha $\mathcal{U}$, a łańcuch łączący je w $\mathcal{V}$ sięga jedynie do dwu sąsiednich ogniw łańcucha U

Lemat (o wpisywaniu łańcucha). *Niech* $\mathcal{U} = \{U_1,..., U_n\}$ *będzie łańcuchem złożonym z obszarów kontinuum metrycznego lokalnie spójnego, który łączy punkty a i b. Niech* $\varepsilon > 0$. *Istnieje łańcuch* $\mathcal{V}$ *wpisany w* $\mathcal{U}$ *bez istotnych sfałdowań łączący a i b, złożony z obszarów o średnicy* $\leqslant \varepsilon$ *zawartych wraz z domknięciami w ogniwach łańcucha U.*

[132] J.R. Kline: *A condition that every subcontinuum of a continuous curve be a continuous curve*. Fund. Math. 10 (1927), s. 292—301.

D o w ó d. Ustalmy w każdym ze zbiorów $U_i \cap U_{i+1}$ po jednym punkcie c_i. Korzystając z poprzedniego lematu połączmy punnkty c_{i-1} i c_i łańcuchem $\mathcal{P}_i$ złożonym z obszarów o średnicy $\leqslant \varepsilon$, które wraz z domknięciem są zawarte w obszarze $\mathcal{U}_{i-1} \cup \mathcal{U}_i \cup \mathcal{U}_{i+1}$. Łańcuch $\mathcal{P}_i$ nie wychodzi poza sumę kolejnych ogniw od $\mathcal{U}_{i-2}$ do $\mathcal{U}_{i+2}$.



Rys. 40. Usuwanie zbędnych ogniw łańcuchów $\mathcal{P}$ i $\mathcal{L}$

Tak otrzymane łańcuchy $\mathcal{P}_i$ — dla par $\{c_{i-1}, c_i\}$ oraz dla par $\{a, c_1\}$ i $\{c_n, b\}$ — łączymy w jeden łańcuch, do którego zaliczamy wszystkie ogniwa łańcuchów $\mathcal{P}_i$ spośród których usuwamy — jeśli trzeba — zbędne ogniwa. Dostaniemy w ten sposób łańcuch łączący a i b w $U_1 \cup \ldots \cup U_n$, którego ogniwa są obszarami o średnicy $\leqslant \varepsilon$ zawartymi wraz z domknięciami w ogniwach łańcucha $\mathcal{U}$. Przeprowadzona konstrukcja zapewnia, że jest to łańcuch wpisany w łańcuch $\mathcal{U}$ bez istotnych sfałdowań.

T w i e r d z e n i e M a z u r k i e w i c z a — M o o r e' a (1913, 1920)[133]. *Każde dwa punkty obszaru w kontinuum metrycznym lokalnie spójnym można w tym obszarze połączyć łukiem.*

D o w ó d. Niech G będzie obszarem kontinuum metrycznego lokalnie spójnego. Niech a i b będą punktami obszaru G. Na mocy pierwszego z lematów, istnieje łańcuch U^1 złożony z obszarów o średnicy $\leqslant 1$ zawartych wraz z domknięciami w obszarze G i łączący a i b. Na mocy drugiego z lematów, w łańcuch $\mathcal{U}^1$ można wpisać bez istotnych sfałdowań łańcuch $\mathcal{U}^2$ złożony z obszarów o średnicy $\leqslant \frac{1}{2}$, zawartych wraz z domknięciami w ogniwach łańcucha $\mathcal{U}^1$, i łączący a i b. Przez indukcję dostajemy ciąg łańcuchów $\mathcal{U}^1, \mathcal{U}^2, \ldots$ łączących punkty a i b, których ogniwa są zawarte wraz z domknięciami w obszarze G i które są przy tym takie, że

(21) średnice ogniw łańcucha $\mathcal{U}^n$ są $\leqslant \frac{1}{n}$,

(22) domknięcia ogniw łańcucha $\mathcal{U}^{n+1}$ są zawarte w ogniwach łańcucha $\mathcal{U}^n$,

(23) łańcuch $\mathcal{U}^{n+1}$ jest wpisany bez istotnych sfałdowań w łańcuch $\mathcal{U}^n$.

[133] R.Ł. M o o r e: *On the foundations of plane analysis situs*. Trans. Amer. Math. Soc. 17 (1916), s. 131—164. Twierdzenie to — w innej, równoważnej formie — w pracy M a z u r k i e w i c z a (1920); por. dwie wcześniejsze (1913) cytowane już prace tego autora. Obaj wymienieni autorzy formułowali swoje twierdzenia dla kontinuów położonych w przestrzeniach euklidesowych, co nie było istotnym umniejszeniem ogólności i zawężeniem metody dowodu.

Suma S_n ogniw każdego z łańcuchów $\mathcal{U}^n$ jest kontinuum łączącym w obszarze G punkty a i b. Sumy te tworzą ciąg zstępujący. Ich przekrój C jest kontinuum kontinuum (twierdzenie 9 z *Wykładu II*) łączącym w obszarze G punkty a i b. Wykażemy, że C jest łukiem o końcach a i b.

Weźmy w tym celu $x \in C$, $a \neq x \neq b$. Zbudujemy rozpad zbioru $C - \{x\}$ na dwa zbiory otwarte niepuste.

Punkt x należy do pewnego ogniwa $\mathcal{U}^1_{n_1}$ łańcucha $\mathcal{U}^1$. Niech $\mathcal{M}_1$ będzie odcinkiem łańcucha $\mathcal{U}^1$ od ogniwa pierwszego do ogniwa $\mathcal{U}^1_{n_1-3}$ (włącznie), a $\mathcal{N}_1$ odcinkiem łańcucha $\mathcal{U}^1$ od ogniwa $\mathcal{U}^1_{n_1+3}$ do ogniwa ostatniego. Oczywiście, sumy M^*_1 i N^*_1 tych odcinków są rozłączne i punkt x nie należy do żadnej z nich.

Punkt x należy do pewnego ogniwa $U^2_{n_2}$ łańcucha U^2. Niech $\mathcal{M}_2$ będzie odcinkiem łańcucha $\mathcal{U}^2$ od ogniwa pierwszego do ogniwa $U^2_{n_2-3}$, a $\mathcal{N}_2$ odcinkiem łańcucha $\mathcal{U}^2$ od ogniwa $U^2_{n_2+3}$ do ogniwa ostatniego. Ponieważ $\mathcal{U}^2$ jest wpisany prosto w U^1, więc najwcześniejszym ogniwem łańcucha $\mathcal{U}^1$, które może przecinać się z ogniwami odcinka $\mathcal{N}_2$, jest ogniwo $U^1_{n_1-2}$. Podobnie, najpóźniejszym ogniwem łańcucha U^1, które może przecinać się z ogniwami odcinka M_2, jest ogniwo $U^1_{n_2+2}$. Stąd, $N^*_2 \cap M^*_1 = \emptyset = M^*_2 \cap N^*_1$ dla sum rozważanych dotąd odcinków. Ponadto, jak poprzednio, $M^*_2 \cap N^*_2 = \emptyset$. Punkt x nie należy do żadnej z tych sum.

Postępując tak dalej, dostajemy dwa ciągi zbiorów otwartych, $M^*_1, M^*_2, \ldots$ i $N^*_1, N^*_2, \ldots$, takich, że ich sumy M i N są rozłączne i punkt x nie należy do żadnej z nich. Jest $C - \{x\} = (C \cap M) \cup (C \cap N)$, bo jeśli $y \neq x$, $y \in C$, to przy dostatecznie dalekim n punkt y należy do M^*_n lub do N^*_n. Dotyczy to również punktów a i b. Ponieważ jednak niemożliwe jest, by a należało do N^*_n i b należało do M^*_n, więc dostajemy $a \in M$ i $b \in N$. Zbiory $C \cap M$ i $C \cap N$ są więc niepuste. Są także otwarte w C. Pokazaliśmy zatem, że punkt x rozspaja C. Na mocy twierdzenia Moore'a (por. *Wykład V*), kontinuum C jest łukiem o końcach a i b.

Prawdziwe jest twierdzenie mocniejsze[134], według którego każde dwa punkty przestrzeni metrycznej zupełnej, spójnej i lokalnie spójnej można połączyć łukiem[135]. Twierdzenie jest mocniejsze: obszar przestrzeni metrycznej zwartej jest przestrzenią *a* lokalnie zwartą, więc homeomorficzną z przestrzenią metryczną zupełną[136], a są znane przestrzenie metryczne zupełne spójne i lokalnie spójne, które nie są lokalnie zwarte, np. płaszczyzna bez podzbioru przeliczalnego gęstego.

Odnotujmy następującą konsekwencję twierdzenia Moore'a o punktach nierozspajających (*Wykład V*): *kontinuum lokalnie spójne niebędące łukiem zawiera krzywą zwykłą zamkniętą bądź triod.*

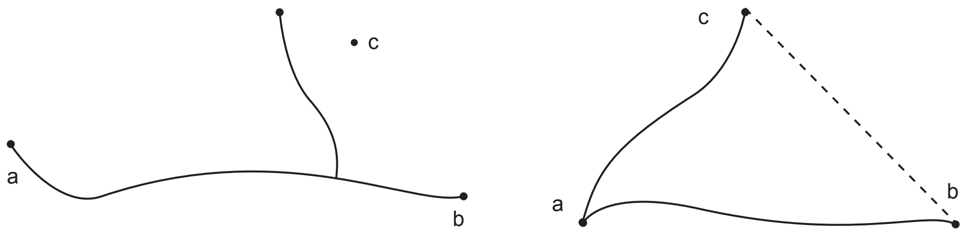
---

[134] Jak pisze L. Whyburn: *Letters from R.L. Moore papers*, Topology Proceedings 2 (1977), s. 320—338; dowiedzione przez R.L. Moore'a w Bull. Amer. Math. Soc. 33 (1927), s. 141.

[135] K. Menger: *Zur Begrundung einer axiomatischen Theorie der Dimension*. Monatshefte fur Mathematik und Physik 36 (1929), s. 193—218; N. Aronszajn: *Uber die Bogenverknupfung in topologischen Raumen*. Fund. Math. 15 (1930), s. 228—241; K. Kuratowski: *Sur les espaces complets*, tamże, s. 300—309. Dowód można znaleźć w *Topologie II* Kuratowskiego, s. 184, a także w *Analytic Topology Whybur*, s. 36—40, i w książce Hockinga-Younga, s. 118.

[136] Twierdzenie Aleksandrowa (1924); por. K. Kuratowski, A. Mostowski: *Teoria mnogości*. Monografie Matematyczne 27, Warszawa 1978, s. 373.

Dowód: Skoro kontinuum nie jest łukiem, to są w nim trzy punkty — a, b i c — nierozspajające, istniejące na mocy twierdzenia Moore'a. Wobec łukowej spójności kontinuum (twierdzenie Mazurkiewicza—Morre'a) istnieją łuki łączące te punkty. Jeśli chociażby jeden z tych (trzech) łuków przecina któryś z łuków w punkcie niekońcowym łuku, powstaje trójnóg (rys. 41 po lewej). Jeśli łuki łączą się z innymi tylko poprzez końce, to, jak łatwo zauważyć, powstaje okrąg (rys. 41 po prawej).



Rys. 41. Jeśli kontinuum lokalnie spójne nie jest łukiem

Wróćmy do twierdzenia z *Wykładu V*, w którym wykazaliśmy, że obraz otwarty odcinka jest odcinkiem. Teraz wystarczyłoby wykazać, że obraz otwarty odcinka nie zawiera ani trójnogu, ani okręgu[137]. Podany w *Wykładzie V* dowód dawał jednak więcej, a mianowicie opisywał postać odwzorowania.

Kontinua lokalnie łukowo spójne

Przestrzeń (metryczna) jest *lokalnie łukowo spójna w punkcie x* jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że jeśli odległość x' od x jest mniejsza niż δ, to istnieje w tej przestrzeni łuk o średnicy ε łączący x i x'.

Jeśli przestrzeń jest spójna, to jej lokalna łukowa spójność pociąga łukową spójność; wystarczy w tym celu zauważyć, że zbiór punktów, który z danym punktem można połączyć łukiem, jest (dla przestrzeni lokalnie łukowo spójnej) zbiorem domknięto-otwartym.

Twierdzenie. *Przestrzeń lokalnie łukowo spójna w punkcie jest lokalnie spójna w tym punkcie.*

Dowód. Niech x będzie punktem przestrzeni. Niech U będzie otoczeniem punktu x. Niech $K(x, r)$ będzie kulą o środku w x i zawartą w U. Z lokalnej łukowej spójności w punkcie x wynika istnienie $\delta > 0$ takiego, że każdy punkt x' odległy o mniej niż δ od x daje się połączyć z punktem x łukiem zawartym w $K(x, r)$. Suma takich łuków jest zbiorem spójnym zawartym w U, do którego wnętrza, złożonego z punktów odległych od x mniej niż o δ, należy punkt x. Dostaliśmy otoczenie spójne punktu x zawarte w U.

[137] Wskazówka: odwzorowanie pozostaje otwarte, jeśli ograniczyć je do przeciwobrazu, istniejącego na mocy założenia nie wprost trójnogu lub okręgu. Por. F. Hausdorff, Gesammelte Werke III, s. 836.

Kontinuum jest nazywane *lokalnie łukowo spójnym*, jeśli jest lokalnie łukowo spójne w każdym punkcie. Z twierdzenia Mazurkiewicza—Moore'a dostajemy w nietrudny sposób.

Twierdzenie. *Kontinuum metryczne lokalnie spójne jest lokalnie łukowo spójne.*

Dowód. Niech x będzie punktem kontinuum metrycznego lokalnie spójnego. Niech $\varepsilon > 0$ będzie dane. Korzystając z lokalnej spójności kontinuum, rozważmy otoczenie otwarte spójne V punktu x (a więc obszar), złożone z punktów odległych od x o mniej niż połowa ε. Istnieje $\delta > 0$ takie, że punkty odległe od X mniej niż o δ leżą w V. Każdy punkt tej kuli daje się (na mocy twierdzenia Mazurkiewicza—Moore'a) połączyć z x łukiem zawartym w V. Łuk ten, wobec tego, że punkty zbioru V są odległe od x o mniej niż połowa ε, ma średnicę mniejszą niż ε.

Ponieważ unikanie odwrotne jest też prawdziwe, więc *w zakresie kontinuów metrycznych lokalna spójność jest tym samym co lokalna łukowa spójność*.

Sama łukowa spójność nie pociąga lokalnej łukowej spójności (przykładami są miotełki, np. miotełka nad ciągiem zbieżnym).

Liczba δ w określeniu lokalnej łukowej spójności zależy nie tylko od ε, ale i od punktu. Przestrzeń metryczna jest *jednostajnie* lokalnie łukowo spójna, jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że jeśli odległość punktu x' od punktu x jest mniejsza niż δ, to punkty te można w niej połączyć łukiem o średnicy mniejszej niż ε.

Twierdzenie. *Jeśli kontinuum (metryczne) jest lokalnie łukowo spójne, to jest jednostajnie lokalnie łukowo spójne.*

Dowód. Niech $\varepsilon > 0$ będzie dane. Dla każdego x istnieje $\delta_x > 0$ takie, że każdy punkt odległy od x o mniej niż δ_x można połączyć z punktem x łukiem o średnicy mniejszej niż połowa ε. Wspomniane kule pokrywają razem kontinuum. Niech $\delta > 0$ będzie liczbą Lebesgue'a tego pokrycia[138]. Jeśli odległość x od x' jest mniejsza niż liczba Lebesgue'a δ pokrycia rozważanymi kulami, to punkty x i x' należą do pewnej jednej ustalonej kuli. Niech jej środkiem będzie a. Punkt x można więc połączyć z a łukiem o średnicy mniejszej niż połowa ε; to samo dotyczy punktu x'. Zatem punkty x i x' dają się połączyć z sobą łukiem o średnicy mniejszej niż ε, co kończy dowód.

Twierdzenie Hahna—Mazurkiewicza

Zanim zbudowano ogólną teorię kontinuów lokalnie spójnych było wiadomo, że kwadrat, inne kostki euklidesowe, a także kostka Hilberta są obrazami ciągły-

[138] Liczba dodatnia nazywana jest liczbą Lebesgue'a pokrycia, jeśli zbióry o średnicy nieprzekraczającej tej liczby mieszczą się całkowicie w pewnym elemencie pokrycia. Na temat Lebesgue'a, por. odpowiednie rozdziały o przestrzeniach metrycznych zwartych w podręcznikach topologii.

mi odcinka prostej rzeczywistej. Zakładamy znajomość chociażby jednej takiej konstrukcji[139]. Okazuje się, że prawdą jest:

Twierdzenie Hahna—Mazurkiewicza (Hahn 1914; Mazurkiewicz 1913, 1920). *Kontinua metryczne lokalnie spójne są obrazami ciągłymi odcinka.*

Dowód (według Hahna 1928)[140]. Niech X będzie kontinuum metrycznym lokalnie spójnym. Jako przestrzeń metryczna zwarta kontinuum X jest obrazem ciągłym zbioru Cantora[141]. Ustalmy, że tym zbiorem Cantora jest zbiór C położony na odcinku [0, 1]. Niech f będzie odwzorowaniem ciągłym C na kontinuum X.

Pokażemy, że f ma przedłużenie ciągłe na cały odcinek [0, 1], co zakończy dowód.

Niech (a_1, b_1), (a_2, b_2),... będzie zbiorem wszystkich składowych dopełnienia zbioru C do odcinka [0, 1], ustawionym w ciąg. Odległości między a_n i b_n dążą do zera. Wobec ciągłości, dążą do zera również odległości między $f(a_n)$ i $f(b_n)$. Na mocy twierdzenia Mazurkiewicza—Moore'a, kontinuum X jest jednostajnie lokalnie łukowo spójne (por. twierdzenie 4). Istnieją więc łuki L_n łączące punkty $f(a_n)$i $f(b_n)$, których średnice dążą do zera.

Niech g będzie przedłużeniem odwzorowania f na odcinek [0, 1] takim, że $g \mid [a_n, b_n]$ jest dowolnie wziętym homeomorfizmem odcinka $[a_n, b_n]$ na łuk L_n.

Odwzorowanie g jest ciągłe.

Istotnie, niech x będzie punktem zbioru C niebędącym żadnym z punktów a_n i b_n i niech $\varepsilon > 0$ będzie dane. Istnieje $\delta > 0$ takie, że obraz zbioru $C \cap (x - \delta, x + \delta)$ przez odwzorowanie f jest zawarty w kuli o promieniu ε wokół $f(x)$, a przy tym takie, że jeśli punkty a_n i b_n należą do przedziału o promieniu δ wokół x, to łuk L_n jest zawarty we wspomnianej kuli. Wtedy obraz przez odwzorowanie g przedziału o promieniu δ wokół x jest również zawarty w tej kuli. Jeśli $x = a_m$, to poprzednie rozumowanie daje ciągłość lewostronną odwzorowania g w punkcie x; ciągłość prawostronną dostaje się na tej samej zasadzie. Podobnie otrzymuje się ciągłość odwzorowania g w punktach $x = b_m$. Oczywista jest ciągłość odwzorowania g w punktach spoza zbioru C.

Obrazy ciągłe odcinka prostej rzeczywistej, jeśli spełniają warunek T_2, są kontinuami metrycznymi (waga obrazu pozostaje przeliczalna, a to, wobec zwartości (pociągającej normalność), zapewnia metryczność na mocy twierdzenia Urysohna). Okazuje się, że są także lokalnie spójne.

Twierdzenie. *Obraz ciągły przestrzeni zwartej lokalnie spójnej jest lokalnie spójny, jeśli jest T_2.*

---

[139] W. Sierpiński: *Wstęp do teorii mnogości i topologii*. Wyd. 2. Warszawa 1947; por. także Dodatek do tego wykładu poświęcony odzorowaniom peanowskim.

[140] H. Hahn: *Über stetige Streckenbilder*. In: *Atti del Congresso Internacionale dei Matematici*. VI. Bologna 1928, s. 217—220.

[141] Twierdzenie z podstawowego kursu topologii, por. np. P. Aleksandrow: *Wwiedienije w obszczuju tieoriju mnożestw i funkcji*. Moskwa—Leningrad 1948, dowiedzione niezależnie przez Hausdorffa i Aleksandrowa.

D o w ó d. Niech X będzie przestrzenią zwartą lokalnie spójną, a f odwzorowaniem tej przestrzeni na przestrzeń Y klasy T_2. Niech $y \in Y$ i niech V będzie otoczeniem punktu y. Dla każdego x ze zbioru $f^{-1}(y)$ weźmy otoczenie spójne U punktu x takie, że $f(U) \subset V$. Te otoczenia pokrywają zbiór $f^{-1}(y)$, a wobec zwartości przestrzeni X, skończenie wiele spośród nich, $U_1, ..., U_k$, również pokrywa $f^{-1}(y)$. Suma $f(U_1) \cup ... \cup f(U_k)$ jest spójna i $y \in f(U_1) \cup ... f(U_k) \subset V$. Korzystając ze zwartości X i założenia T_2 o przestrzeni Y, wnioskujemy o istnieniu otoczenia W punktu y takiego, że $f^{-1}(W) \subset U_1 \cup ... \cup U_k$. Mamy $y \in W \subset f(U_1) \cup ... \cup f(U_k)$, co dowodzi, że zbiór (spójny) $f(U_1) \cup ... \cup f(U_k)$ jest otoczeniem punktu y.

W ten sposób diagram wynikań się zamyka i następujące zakresy przestrzeni metrycznych okazują się równe:

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c}\text{kontinua}\\ \text{lokalnie spójne}\end{array} & \rightarrow & \begin{array}{c}\text{kontinua lokalnie}\\ \text{łukowo spójne}\end{array} \\ \nwarrow & & \swarrow \\ & \begin{array}{c}\text{obrazy ciągłe}\\ \text{odcinka}\end{array} & \end{array}$$

Wynikanie w kierunku lokalnej spójności dostaje się z ostatnio dowiedzionego twierdzenia, jeśli weźmie się pod uwagę, że odcinek jest kontinuum lokalnie spójnym.

Założenie zwartości jest w ostatnim z twierdzeń istotne: obraz ciągły przestrzeni lokalnie spójnej może nie być lokalnie spójny. Świadczą o tym obrazy ciągłe – nawet wzajemnie jednoznaczne – półprostej domkniętej położone na płaszczyźnie, które mogą wyglądać jak na rysunkach niżej. Otrzyma się lokalną spójność, jeśli założy się spójność przeciwobrazów punktów.

a b

Rys. 42. a. Jedna z wersji tzw. okręgu warszawskiego; **b.** Linia będąca podzbiorem kontinuum Janiszewskiego–Knastera, tego samego co na rys. 29 z *Wykładu V.*

Pokazaliśmy, że kontinua metryczne lokalnie spójne okazały się tym samym co obrazy ciągłe odcinka. Ale dla ogółu kontinuów metrycznych nie istnieje kontinuum metryczne, z którego one wszystkie mogłyby być otrzymane jako obrazy ciągłe: Z. W a r a s z k i e w i c z (1934)[142] zbudował kontinuum kontinuów płaskich, które nie mają wspólnego przeciwobrazu w postaci kontinuum metrycznego.

[142] Z. W a r a s z k i e w i c z: *Sur un probléme de M. Hahn*, Fund. Math. 22 (1934), s. 180—205.

Własność (S) Sierpińskiego

Na inny aspekt lokalnej spójności zwraca uwagę następujące

Twierdzenie Sierpińskiego (1920)[143]. *Jeśli kontinuum metryczne jest lokalnie spójne, to* (S) *dla każdego* $\varepsilon > 0$ *istnieje pokrycie skończone tego kontinuum złożone ze zbiorów spójnych o średnicy nieprzekraczającej* ε.

Dowód. Dla każdego punktu weźmy otoczenie spójne o średnicy nie przekraczającej ε, istniejące na mocy lokalnej spójności. Składowe wnętrz tych otoczeń (są one zbiorami otwartymi) pokrywają całość. Wobec zwartości, pewna skończona ich liczba również pokrywa całość.

Wynikanie odwrotne jest także prawdziwe i to bez założenia zwartości.

Twierdzenie. *Jeśli przestrzeń metryczna ma własność* (*S*)*, to jest lokalnie spójna*.

Dowód. Niech x będzie punktem przestrzeni metrycznej X i niech $\varepsilon > 0$ będzie dane. Wobec własności (S), istnieją zbiory $C_1, \ldots, C_n$, domknięte, spójne, o średnicy nieprzekraczającej $\frac{\varepsilon}{2}$, które razem pokrywają X. Niech $C_1, \ldots, C_m$ będą tymi spośród nich, do których należy punkt x. Zbiór $V = C_1 \cup \ldots \cup C_m$ jest spójny i ma średnicę $\leqslant \varepsilon$, a zbiór $W = X - (C_{m+1} \cup \ldots \cup C_n)$ jest otwarty. Jest $x \in W \subset V$. Zbiór V jest więc otoczeniem spójnym punktu x, mającym średnicę nieprzekraczającą ε.

Przeprowadzony dowód zapewnia istnienie pokrycia skończonego złożonego z obszarów o średnicy nieprzekraczającej ε. Domykając zbiory spójne, o których mowa w warunku (S), dostaniemy pokrycie skończone złożone z kontinuów o średnicy nieprzekraczającej ε. Uwagi te nie zapewniają wszakże istnienia pokrycia kontinuami lokalnie spójnymi (domknięcia obszarów nie muszą być lokalnie spójne; por. domknięcie obszaru ograniczonego okręgiem warszawskim, rys. 42 a).

Wiemy — twierdzenie Mazurkiewicza—Moore'a — że kontinuum (metryczne) lokalnie spójne jest obrazem ciągłym odcinka. Dowód, który przeprowadziliśmy, odbiega jednak od znanych klasycznych konstrukcji, za pomocą których budowane były przez Peano, Hilberta i późniejszych autorów odwzorowania odcinka na kwadrat. Polegały one na wyjściu od pewnych pokryć kwadratów kwadratami o mniejszych średnicach, które po ustawieniu w łańcuchy dawały pewne naturalne możliwości budowania coraz lepszych aproksymacji zamierzonych odwzorowań. Celem pracy Sierpińskiego było podanie ogólnego zarysu wspomnianych konstrukcji. Na swój sposób przeprowadził tę konstrukcję Banach[144]. Dowód zaczyna się od wzmocnienia twierdzenia Sierpińskiego.

[143] W. Sierpiński: *Sur une condition pour qu'un continu soit une courbe jordanienne*. Fund. Math. 1 (1920), s. 44—60; *Oeuvres choisies* II, s. 308—321. Własności (S) poświęcone są rozdziały w *Analytic topology* Whybruna i *Elementary topology* Spencera i Halla, loco cit.

[144] S. Banach: *Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych*. Monografie Matematyczne 17. Warszawa—Wrocław 1951, s. 158.

Elementy pokrycia zostają nieco powiększone tak, aby same miały własności (S), a więc by po domknięciu były kontinuami lokalnie spójnymi, co pozwala kontynuować postępowanie.

Ale jeśli nie zależy nam na szczegółowym opisie postaci zmodyfikowanych elementów pokrycia, to — wiedząc, że własność (S) pociąga lokalną spójność, to samą konkluzję Banacha można dostać z podanych już dotąd twierdzeń. Twierdzenie Sierpińskiego, jak i prowadzącą do niego argumentację można wtedy widzieć następująco:

Twierdzenie Sierpińskiego (1920)[145]. *Kontinuum metryczne lokalnie spójne ma dla każdego* $\varepsilon > 0$ *pokrycie skończone złożone z kontinuów lokalnie spójnych o średnicy nieprzekraczającej* ε.

Dowód. Niech X będzie kontinuum metrycznym lokalnie spójnym. Niech $\varepsilon > 0$ będzie dane. Istnieje, wobec twierdzenia Hahna—Mazurkiewicza, odwzorowanie ciągłe f odcinka $[0, 1]$ na X. Niech $I_1, \ldots, I_n$ będą odcinkami pokrywającymi odcinek $[0, 1]$ takimi, że $f(I_j)$ mają średnice nieprzekraczające ε. Zbiory $f(I_j)$ są kontinuami lokalnie spójnymi pokrywającymi X.

Kontinua lokalnie spójne z twierdzenia Sierpińskiego mogą zachodzić na siebie wnętrzami. R.H. Bing i E.E. Moise, niezależnie od siebie (1949) wzmocnili twierdzenie Sierpińskiego, dowodząc, że kontinuum metryczne lokalnie spójne ma dla każdego $\varepsilon > 0$ pokrycie skończoną liczbę kontinuów lokalnie spójnych o średnicy nieprzekraczającej ε, mających wnętrza spójne i rozłączne[146].

Wśród konsekwencji tego twierdzenia odnotujmy istnienie metryki wypukłej wyznaczającej topologię kontinuum lokalnie spójnego[147].

Jeśli kontinuum nie jest lokalnie spójne

Jeśli kontinuum nie jest lokalnie spójne, to pojawia się w nim pewna osobliwość, od której zaczął badania nad lokalną spójnością S. Mazurkiewicz[148].

Niech x będzie punktem, w którym kontinuum X klasy T_2 nie jest lokalnie spójne. Istnieje wtedy otoczenie U punktu x takie, że żadne otoczenie punktu x zawarte w U nie jest spójne. Jeśli więc V jest otoczeniem punktu x zawartym w U, to istnieje składowa C_V zbioru U różna od składowej punktu x w zbiorze U, mająca przekrój niepusty ze zbiorem V. Na mocy lematu Janiszewskiego domknięcie składowej C_V mają punkty poza U (rys. 43) (można przyjąć, że i poza domknięciu otoczenia U).

Rodzina zbiorów C_V ma osobliwość, którą teraz opiszemy.

---

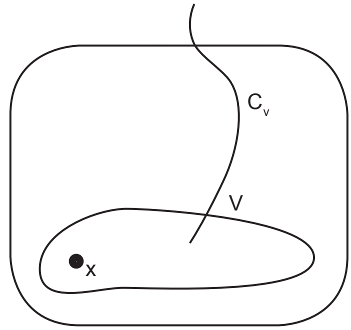
145 W. Sierpiński: *Sur une condition*...

146 R.H. Bing: *Partitioning a set*. Bull. Amer. Math. Soc. 55 (1949), s. 1101—1110; Collected Papers. Vol. 2, 401—410; E.E. Moise: *Grille decomposition and convexication theorems for compact metric locally connected continua*. Bull. Amer. Math. Soc. 55 (1949), s. 1111—1121.

147 Od metryki wypukłej wymagamy, by dla każdych dwóch punktów można było znaleźć trzeci punkt leżący „w pół drogi".

148 S. Mazurkiewicz: *Sur les lignes deJordan*. Fund. Math. 1 (1920), s. 61—81; Travaux, s. 76—113.

Mając skończenie wiele otoczeń $V_1, ..., V_n$ punktu x zawartych w U, znajdziemy zawsze jeszcze jedno takie otoczenie V, które jest rozłączne z każdą ze składowych odpowiadających zbiorom V_i, co jest możliwe, bo te, jako składowe zbioru U, są domknięte w U. Można zatem zbudować (przez indukcję) nieskończenie wiele składowych otoczenia U punktu x wystających swymi domknięciami poza U, i które można dobrać przy tym tak, by w dowolnym otoczeniu punktu x były punkty tych składowych.



Rys. 43. Składowa C_v

Wspomniane składowe tworzą wiązkę kontinuów wzajemnie rozłącznych, skupiającą się przy x i — wobec zwartości — przy pewnym punkcie b spoza U[149]. Jest to tego rodzaju osobliwość, jaką mają punkty na odcinku zagęszczenia wiązki odcinków $\{1/n\} \times [0, 1]$.

Jeśli więc kontinuum X nie jest lokalnie spójne w punkcie x, to

(24) istnieje otoczenie U punktu x, punkt b poza U, ciągi otoczeń V_n punktu x i W_n punktu b, o średnicach dążących do zera, oraz ciąg $K_1, K_2, ...$ kontinuów wzajemnie rozłącznych kontinuów K_n przecinających V_n i W_n.

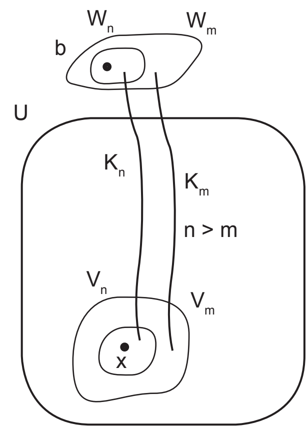
Każde podkontinuum nielokalnie spójne kontinuum X, wymusza pojawienie się w kontinuum X konfiguracji (24).

Zauważmy, że żaden zbiór skończony nie rozspaja kontinuum X między x i b.

Istotnie, jeśli zbiór domknięty A rozspaja między x i b, to

$$X - A = G \cup H$$

gdzie G i H rozłączne i takie, że $x \in G$ i $b \in H$. Z przeprowadzonych rozważań wynika, że nieskończenie wiele spośród kontinuum K_n ma punkty w obu zbiorach G i H. Stąd zbiór A ma punkty w nieskończenie wielu kontinuach K_n. Zbiór (rozspajający) A nie może być skończony.



Rys. 44. Konfiguracja (24)

W n i o s e k. *Jeśli kontinuum (klasy T_2) nie jest lokalnie spójne, to zawiera parę punktów taką, że żaden zbiór skończony nie rozspaja kontinuum między punktami tej pary.*

T w i e r d z e n i e: *Jeśli w kontinuum pojawia się konfiguracja* (24), *to zawiera ono podkontinuum nielokalnie spójne*.

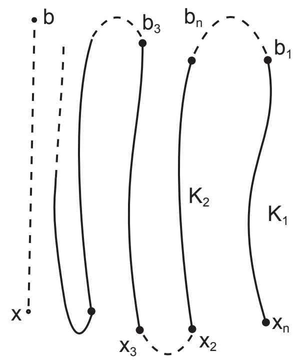
---

[149] Tworzą one w granicy tzw. kontinuum konwergencji; por. K. Z a r a n k i e w i c z: *Sur les points de division dans les ensembles connexes*. Fund. Math. 9 (1927), s. 124—171.

W dowodzie[150] wystarczy, wobec poczynionej uwagi, zająć się jedynie przypadkiem, w którym samo kontinuum jest lokalnie spójne.

Niech więc kontinuum X — lokalnie spójne — zawiera konfigurację (24) związaną z punktem x. Rozważmy dwa ciągi, a mianowicie ciąg punktów x_n i ciąg punktów b_n, należących do K_n zbieżnych odpowiednio do x i b. Lokalna spójność kontinuum zapewnia możliwość łączenia kolejnych punktów ciągu x_n łukami o średnicach dążących do zera i skupiającymi się w punkcie x. To samo mamy wokół punktu b. Kontinua K_n i wspomniane łuki o numerach nieparzystych przy x i numerach parzystych przy b tworzą w sumie zbiór spójny — por. rys. 45 — który można uzupełnić, domykając, do podkontinuum kontinuum X, nielokalnie spójnego w x, który ma osobliwość sinusoidy zagęszczonej.

Podobny charakter ma dowód twierdzenia Kline'a, wspomnianego wcześniej w tym wykładzie (s. 85): zawieranie się w kontinuum lokalnie spójnym podkontinuum nielokalnie spójnego wymusza zaistnienie konfiguracji (24), która, wzbogacona budowanymi w przeprowadzonym dowodzie łukami (na przemian), prowadzi w rezultacie do kontinuum nieprzywiedlnego niebędącego łukiem.



Rys. 45. Konfiguracja $\sin\frac{1}{x}$

Kontinuami dziedzicznie lokalnie spójnymi są dendryty, którym przyjrzymy się w *Wykładzie VIII*. Osobliwość, jaką ma dendryt w postaci miotełki, złożonej z odcinków długośći $1/n$ wychodzących z jednego punktu można zagęścić, otrzymując dendryt, a więc kontinuum dziedzicznie lokalnie spójne mające osobliwość tej miotełki w każdym punkcie. Odpowiedni przykład podał P.S. Urysohn[151].

Można bezpośrednio sprawdzić, że krzywa trójkątowa Sierpińskiego jest dziedzicznie lokalnie spójna. Na drugim krańcu jest dywan Sierpińskiego, który zawiera obraz homeomorficzny każdego, nawet najbardziej osobliwego kontinuum płaskiego.

---

[150] Dowód szkicujemy za P.S. Urysohnem: *Memoire sur les multiplicites cantoniennes*. In: *Trudy*. T. 2., s. 570.

[151] P.S. Urysohn: *Memoire sur les multiplicites cantoriennes II*, Verhandelingen der Kon. Akademie van Wetenschappen Amsterdam, 1 sectie, 13, No 4 (1928), s. 1—172 (cytowana wyżej praca z „Trudow II").

Dodatek. Odwzorowania peanowskie

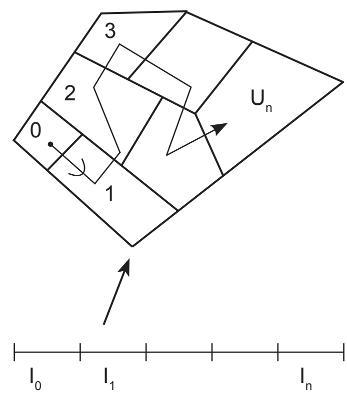
∗ Ogólna zasada konstrukcji ∗ Odwzorowanie Peany ∗ Odwzorowanie Hilberta ∗ Odwzorowania Sierpińskiego i Polyi ∗ Krotność odwzorowań peanowskich ∗ O różniczkowalności odzworowań peanowskich

Odwzorowania ciągłe odcinka liczb rzeczywistych w płaszczyznę, których obraz ma wnętrze niepuste, będziemy nazywać *odwzorowaniami peanowskimi*.

W klasycznych przykładach chodzi o odwzorowanie na kwadrat, trójkąt lub inne proste figury płaskie, i jedynie te nazywa się peanowskimi[152].

Samo istnienie odwzorowania zapewnia twierdzenie Hahna—Mazurkiewicza, ale klasyczną ideę odwzorowań peanowskich oddaje pełniej teoria oparta na własności (S) Sierpińskiego, która w przypadku wielokątów płaskich ma ciekawe geometryczne egzemplifikacje.

Mając ustalone ε dodatnie, twierdzenie Sierpińskiego zapewnia istnienie pokrycia figury skończenie wieloma zbiorami spójnymi o średnicy nieprzekraczającej ε. Wobec spójności figury, można te zbiory ponumerować tak, by tworzyły łańcuch (tak jak robiliśmy to przy okazji dowodu twierdzenia Wildera), $U_1,\ldots,$ U_n, niekoniecznie bez samoprzecięć. Pozwala to na zbudowanie odwzorowania ciągłego, określonego na odcinku podzielonym wcześniej na n równych odcinków tak, by j-t z kolei odcinek miał wartości w zbiorze U_j. Każdy punkt figury jest tym samym w odległości nie większej niż ε od pewnej wartości odwzorowania; p. rys. 46.



Rys. 46. Metoda klasyczna

Jeśli zadbamy o to, by elementy pokrycia miały nadal własność (S), to postępowanie można iterować (Banach).

Mając z góry dany ciąg liczb dodatnich dążący do zera, można zbudować, w opisany wcześniej sposób, odpowiadające tym liczbom odwzorowania f_n, tak

[152] Książka W. Sierpińskiego: *Wstęp do teorii mnogości i topologii*. Wyd. 2. Warszawa 1947, zawiera wyczerpujące informacje o klasycznych odwzorowaniach peanowskich. Por. również artykuł A. Lelka: *O funkcjach Peany*. „Prace Matematyczne” 7 (1962), s. 127—140.

by tworzyły ciąg jednostajnie zbieżny. Granica tego ciągu jest odwzorowaniem ciąłym odcinka na rozważaną figurę.

Metoda Sierpińskiego nie zapewnia efektywności konstrukcji. Ciąg odwzorowań buduje się indukcyjnie, mając na każdym kroku pokrycie skończone, które należy ustawić w łańcuch. Sama spójność figury nie jest tego jednoznacznym wskazaniem. Ale sytuacja geometryczna wskazuje zwykle jakieś wyróżnienie, tym samym pewne odwzorowania peanowskie uzyskane tą metodą mają pozór efektywności, mając na myśli to, że względy estetyczne uwalniają nas od poczucia nieuzasadnionego wyboru.

Zakładamy znajomość klasycznych konstrukcji. Będą one zresztą, w zmienionej nieco konwencji, ale w sposób nietrudno rozpoznawalny, przypomniane i opisane.

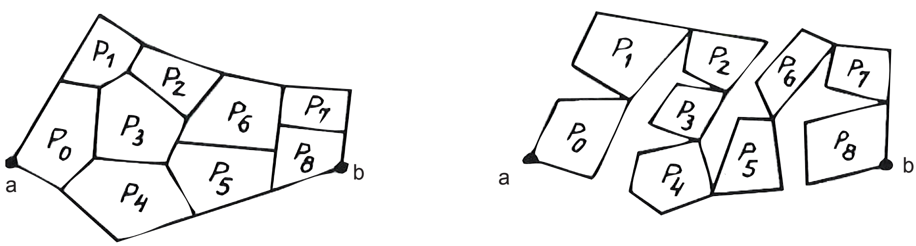
Wzorując się na tych konstrukcjach lub je wykorzystując, buduje się odwzorowania ciągłe na sześcian i inne figury wielowymiarowe. Można pokazać[153], że z istnienia odwzorowania ciągłego odcinka na kwadrat wynika formalnie odwzorowanie ciągłe odcinka na kostkę Hilberta.

Ogólna zasada konstrukcji[154]

Wielokąt P, na którego brzegu wyróżniamy dwa punkty a i b, dzielimy na wielokąty $P_0,\dots, P_k$ tak, by stykały się jedynie brzegami (por. rys. 47, strona lewa). Następnie wielokąt P rozcinamy wzdłuż linii podziału tak, by otrzymać łańcuch łączący a i b, złożony z wielokątów stykających się jedynie wierzchołkami (por. rys. 47, strona prawa). Otrzymujemy łańcuch wielokątów, który numerujemy tak, by numeracja była zgodna z naturalnym geometrycznym porządkiem łańcucha, w czym mieści się wymaganie, by $a \in P_0$ i $b \in P_k$.

Rozważmy figurę $p^{(1)}$ będącą sumą wielokątów łańcucha. Tę figurę można zrealizować w przestrzeni, chociaż w pewnych przypadkach również na płaszczyźnie.

Rozumiemy, że ogniwa figury $P^{(1)}$ są przystające do odpowiednich wielokątów podziału $\{P_1,\dots, P_k\}$ wielokąta P.



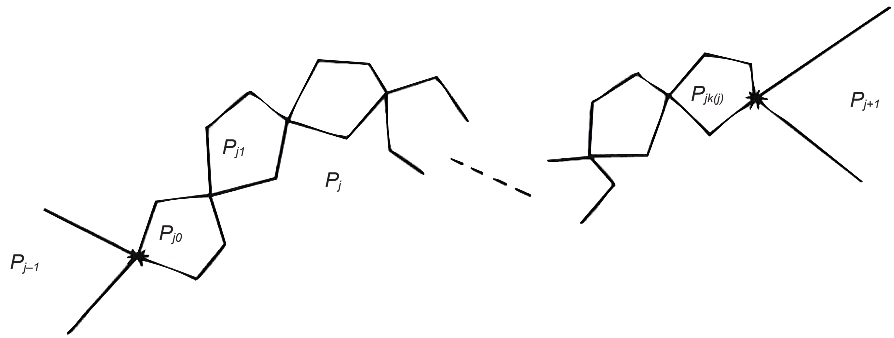
Rys. 47. Podział $P_0,\dots, P_k$ i łańcuch $P^{(1)}$

[153] W. Sierpiński: *Remarque sur la courbe peanienne*. „Wiadomości Matematyczne" 42 (1937), s. 1—3.

[154] Por. J. Mioduszewski, w „Delta" 7 (1977), s. 1—4 oraz Idem: *Peano maps through cuttings*. Center for Mathematical Culture, Special Issue (1990), s. 22—23.

Postępowanie kontynuujemy. Na wielokątach P_j dokonujemy podziałów na wielokąty P_{ji}, $i = 0,\ldots, k(j)$, rozcinając te wielokąty wzdłuż linii podziałów tak, że powstaje łańcuch złożony z wielokątów przystających do P_{ji}, łączących się jedynie wierzchołkami, i łączący dwa wierzchołki wielokąta P_j, te którymi styka się on z wielokątami sąsiednimi (por. rys. 48) (w szczególności, mogą to być punkty *a* i *b*, jeśli P_j jest wielokątem P_0 lub P_k).

Otrzymaliśmy łańcuch $P^{(2)}$ — rzędu 2 — i wielokąty P_{ji} rzędu 2, $i = 1,\ldots, k(j)$.



Rys. 48. Łańcuch $\mathcal{P}^{(2)}$

Mając łańcuch $P^{(n)}$ wielokątów rzędu n złożony z wielokątów $P_{j_1\ldots j_n}$, dzielimy każdy z nich na wielokąty $P_{j_1\ldots j_n}\, i$, $i = 0,\ldots, k\,(j_1,\ldots, j_n)$ (liczba tych wielokątów na każdym wielokącie $P_{j_1\ldots j_n}$ może być inna) tak, by powstał łańcuch łączący dwa punkty wielokąta $P_{j_1\ldots j_n}$, te którymi styka się on z sąsiednimi wielokątowymi. Powstaje łańcuch $P^{(n+1)}$.

W ten sposób buduje się ciąg łańcuchów (figur na ogół przestrzennych) $P^{(1)}$, $P^{(2)},\ldots$, z których każdy następny jest rozdrobnieniem (w sensie opisanym wcześniej) poprzedniego.

Będziemy zakładać, że liczba ogniw, na które rozpada się wielokąt $P_{j_1\ldots j_n}$, jest $\geqslant 2$, i że maksimum średnic ogniw w łańcuchu dąży do zera ze wzrostem rzędu łańcucha.

Wizualnie ciąg rozdrabniających się łańcuchów daje w granicy łuk, który przez operację odwrotną — sklejania rozcięć — daje wielokąt, od którego zaczynaliśmy konstrukcję. Ta operacja odwrotna realizuje odwzorowanie peanowskie granicznego łuku na rozważany wielokąt. Teoria granic wstecznych pozwala na ścisły matematyczny opis zarówno obiektu granicznego — a to, że jest łukiem wynika z twierdzenia charakteryzacyjnego Moore'a — jak i odwzorowania ciągłego z obiektu granicznego na aproksymujące go wielokąty, a w szczególności na pierwszy z nich — kwadrat.

Pokażemy na sposób arytmetyczny, że opisana konstrukcja wyznacza odwzorowanie ciągłe odcinka — ustalmy, że odcinka jednostkowego $I = \{x : 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ — na wielokąt P.

Dla opisu tego odwzorowania podzielmy odcinek I na równe co do długości — stykające się końcami — odcinki $I_0,\ldots, I_k$ (odcinków jest tyle, na ile wielokątów dzieliliśmy wielokąt P w pierwszym przybliżeniu).

Podział kontynuujemy. Odcinki I_j dzielimy w podobny sposób na równe co do długości odcinki I_{ji}, $i = 1,\ldots, k(j)$ (liczba $k(j)$ ta sama co dla wielokąta P_j), otrzymując następny podział.

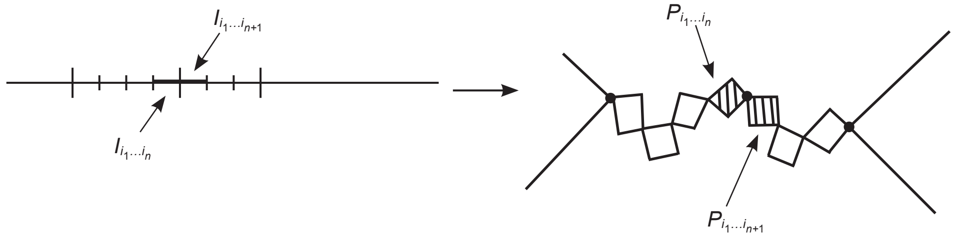
Podział n-tego rzędu składa się z odcinków $I_{j1\ldots jn}$, z których każdy dzielimy na $k(j_1,\ldots, j_n)$ odcinków równych (liczba ta sama co przy wielokątach $P_{j1\ldots jn}$), otrzymując podział $(n + 1)$-ego rzędu.

Każdy punkt x na odcinku I leży dla każdego n w jakimś odcinku $I_{j1\ldots jn}$ przedziału n-tego rzędu; w jednym takim odcinku lub dwu; ten drugi przypadek ma miejsce wtedy, gdy punkt x jest wspólnym końcem odcinków przedziału; jeśli n jest najmniejszym rzędem przedziałów, w którym to się zdarza, to odcinki $I_{i1}, I_{i1i2},\ldots, I_{i1i2\ldots in-1}$, w których x leży, przypisane są punktowi x jednoznacznie, natomiast w podziałach rzędów wyższych punkt x leży w dwóch odcinkach $I_{i1\ldots in-1}\ 0\omega\omega\ldots$ i $I_{i1\ldots in-1}\ \omega 00\ldots$, gdzie symbolem ω oznaczona jest najwyższa możliwa cyfra, tj. $k(j_1,\ldots, j_m)$.

Punktowi x przypisany jest więc ciąg

$$i_1 i_2 \cdots i_n,\ i_{n+1}\ldots$$

liczb naturalnych, gdzie cyfra i_{n+1} przebiega wartości od 0 do $k(i_1,\ldots, i_n) = \omega$.



Rys. 49. Podział odcinka $I_{i_1\ldots i_{n-1}}$ i wielokąta $P_{i_1\ldots i_{n-1}}$

Jest jeden tego rodzaju ciąg, z wyjątkiem punktów będących punktami podziału, którym odpowiadają dwa ciągi[155].

$$(*) \qquad i_1\ldots i_{n-1} r\omega\omega\ldots \text{i } i_1\ldots i_{n-1}(\mathrm{r} + 1)000\ldots$$

Odwzorowanie odcinka I na wielokąt P określamy przypisując punktowi x, $x \in I_{i1} \cap I_{i1i2} \cap\ldots$, punkt leżący w przekroju

$$(**) \qquad P_{i1} \cap P_{i_1 i_2} \cap\ldots,$$

który nie zależy od tego, którymi z dwu ewentualnych przedstawień $(*)$ punktu x się posłużymy, bo przekroje (**) im odpowiadające wyznaczają ten sam punkt — punkt styku wielokątów $P_{i_1\ldots i_{n-1}}\omega$ i $P_{i_1\ldots}(i_{n-1}+1)0$.

Odwzorowanie jest więc poprawnie określone. Jest ono odwzorowaniem na cały wielokąt P, bo każdy punkt tego wielokąta leży w jakimś przekroju (**).

[155] Opisane zostały dobrze znane pozycyjne — o zmiennej zasadzie — rozwinięcia liczby rzeczywistej, pochodzące z jednej z wczesnych prac Cantora.

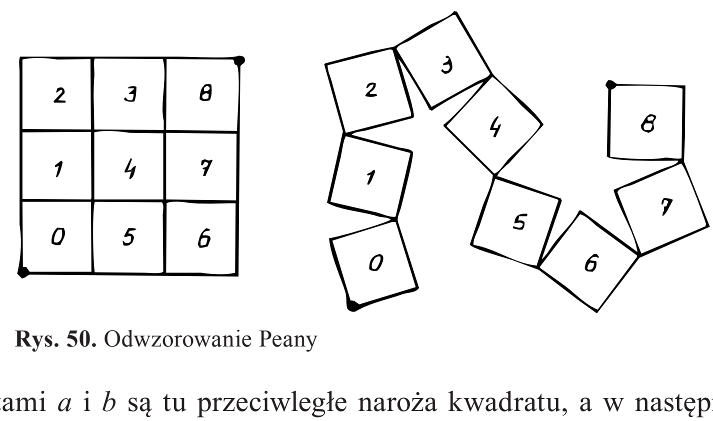
Odwzorowanie jest ciągłe. Weźmy bowiem $p \in P$ i $\varepsilon > 0$. Istnieje n takie, że wszystkie wielokąty n-tego przybliżenia, do których należy p, są zawarte w kole o środku p i promieniu ε (przypomnijmy, że średnice wielokątów, na które dzielimy P, dążą do zera w miarę dokonywania nowych podziałów). Niech x będzie punktem odcinka I, któremu przyporządkowaliśmy punkt p. Punkt x leży tylko na jednym lub na dwu odcinkach przedziału n-tego rzędu odcinka I. W każdym z tych dwu przypadków, odcinka lub dwu odcinków (wtedy x jest ich wspólnym końcem), są to otoczenia punktu x, które przez określone przez nas odwzorowanie przechodzą na jeden lub dwa wielokąty n-tego przybliżenia w przedziałach wielokąta P, do których punkt p należy i które wobec doboru n mieszczą się w kole o środku p i promieniu ε.

Ogólny opis konstrukcji został przeprowadzony.

Punkty wielokąta P nieleżące na liniach podziału są wartościami jednokrotnymi odwzorowania. Jest tak, bo tego rodzaju punkt p leży w dokładnie jednym wielokącie każdego z przybliżeń i punkt x, w którym jest przyjęty jako wartość, jest jednoznacznie wyznaczony, bo w każdym podziale odcinka I jest tylko jeden odcinek odpowiadający wielokątowi, do którego należy p. Przekrój tych odcinków wyznacza punkt x. Punkty jednokrotne stanowią dla opisanych odwzorowań zbiór gęsty typu G_δ. Wartości wielokrotne mogą leżeć jedynie na liniach podziału, które stanowią zbiór F_σ–a I-ej kategorii. Wartości wielokrotne muszą się pojawić, co wynika już stąd, że odcinka nie można odwzorować na wielokąt homeomorficznie.

Odwzorowanie Peany (1890)[156]

Podzielmy kwadrat na 9 jednakowych kwadratów, rozcinając je w łańcuch — jak na rys. 50, i kontynuując postępowanie.



Rys. 50. Odwzorowanie Peany

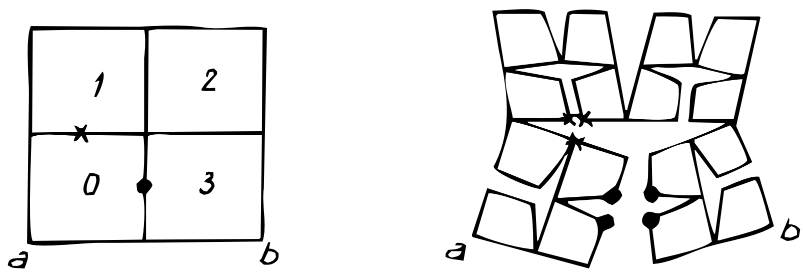
Punktami a i b są tu przeciwległe naroża kwadratu, a w następnych przybliżeniach ten rodzaj rozcinania — między przeciwległymi narożami kwadratów — się utrzymuje.

[156] G. Peano: *Sur une courbe qui remplit toute aire plane*. Math. Ann. 36 (1890), s. 157—160; por. *Selected Works of Giuseppe Peano*, London 1973; s. 143—149.

Wartości wielokrotne leżą na liniach podziału, które stanowią siatkę prostopadłych i w żadnym punkcie nie schodzą się więcej niż 4 rozcięcia. Zatem krotność wartości nie przekracza 4. Nie pojawiają się wartości krotności 3. Wartościami krotności 2 są punkty kwadratu, przez które przechodzi jedno rozcięcie, a wartościami krotności 4 są punkty, w których rozcięcia się krzyżują. Przy dalszych rozcięciach nowych liczb będących krotnościami nie przybywa (!). Krotnościami wartości odwzorowania Peany są więc liczby 1 (tych wartości jest zbiór gęsty typu G_δ), 2 i 4.

Odwzorowanie Hilberta[157]

Dzielimy kwadrat na 4 równe kwadraty. Rozcięcia teraz są inne (por. rys. 51). W ich wyniku łańcuch łączy teraz dwa sąsiednie wierzchołki kwadratu i ten wzór rozcięć jest kontynuowany.



Rys. 51. Odwzorowanie peanowskie Hilberta

Wartości wielokrotne leżą na siatce linii wzajemnie prostopadłych, schodzących się co najwyżej po cztery. Stąd największą możliwą krotnością jest 4. Łatwo wyróżnić wartości krotności 1, 2 i 4. Są tu jednak (w odróżnieniu od odwzorowania Peany) wartości krotności 3, jest nią np. punkt kwadratu zaznaczony krzyżykiem, który leży wprawdzie na przecięciu się linii prostopadłych następnego podziału, ale nie rozcięciu łańcucha trzeciego rzędu, na którym leży; por. odpowiadające temu punktowi punkty łańcucha po lewej stronie rysunku, oznaczone krzyżykami.

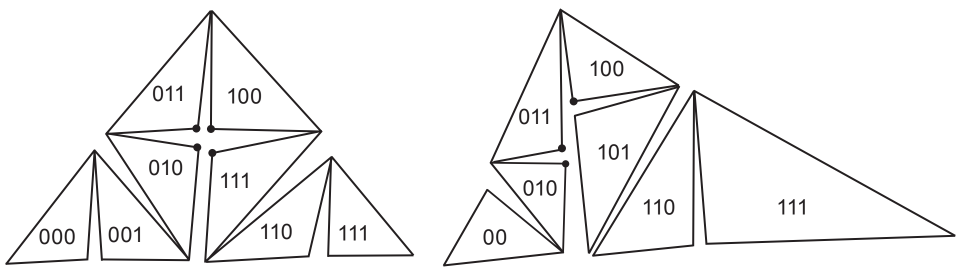
Odwzorowania Sierpińskiego i Polyi

We wczesnej konstrukcji Sierpińskiego[158] trójkąt prostokątny równoramienny dzielony jest wysokością na pół. Dokonujemy rozcięć jak na rys. 52. Kontynuujemy podziały i rozcięcia — od podstaw ku wierzchołkom kątów prostych. Krotnościami odwzorowania są liczby 1, 2 i 4.

[157] D. Hilbert: *Über die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flachenstück*. Math. Ann. 38 (1891), s. 459—460.

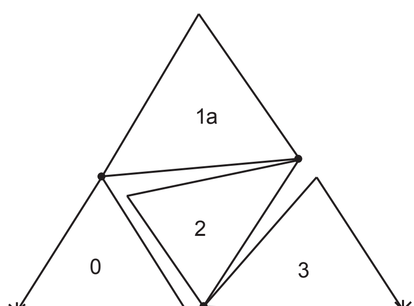
[158] W. Sierpiński: *Sur une nouvelle courbe continue qui remplit toute aire plane*. Bull. Acad. Sci. de Cracovie, Serie A (1912), s. 462—478; Oeuvres choisies II, s. 52—66. Por. również Idem: *O krzywych wypełniających kwadrat*. Wiadomości Matematyczno-Fizyczne 23 (1912), s. 193—219.

George Polya[159] zmodyfikował konstrukcję Sierpińskiego, otrzymując odwzorowanie peanowskie odcinka na trójkąt o krotnościach 1, 2 i 3, tj. najoszczędniejsze pod tym względem z możliwych. Proponował dla tego celu trójkąty prostokątne, których proporcje boków są niealgebraiczne; można uniknąć arytmetycznych trudności, dowodząc za pomocą twierdzenia Baire'a, że dla tego celu trójkątów prostokątnych jest pod dostatkiem (chociaż nie tyle co u Polyi, bo z pominięciem zbioru *I*-ej kategorii). Tymczasem Sierpiński[160] proponuje w tym celu wziąć trójkąt pitagorejski o bokach 3, 4 i 5 i dzielić go wysokością. Powstają trójkąty podobne, które dalej w ten sam sposób dzielimy, dokonując rozcięć jak na rys. 52. po stronie prawej. Teraz, w odróżnieniu od poprzedniego przypadku, wysokości dzielących trójkąty drugiego rzędu spodki się nie pokrywają; ta prawidowość utrzymuje się we wszystkich dalszych podziałach. Nie jest to wcale łatwa własność trójkąta pitagorejskiego.



Rys. 52. Odwzorowania Sierpińskiego (a) peanowskie Polyi—Sierpińskiego (b)

We wszystkich podanych przykładach punktem wyjścia konstrukcji był podział figury na figury do niej podobne. Jeszcze jednym takim przykładem jest trójkąt równoboczny i jego podział na cztery równe trójkąty oraz związane z tym rozcięcie (por. rys. 53).

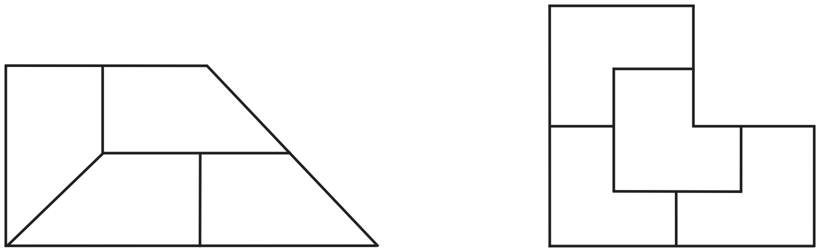


Rys. 53. Odwzorowanie peanowskie wyznaczone przez podział samopodobny trójkąta równobocznego

[159] G. Polya: *Uber Peanosche Kurve*. Bull. Acad. Sci. Cracovie, Sci. math. et nat. Serie A (1913), s. 1—9.

[160] W. Sierpiński: *Wstęp do teorii mnogości i topologii…*

Istnienie rozcięcia, jeśli podział jest już dany, nie jest wcale oczywiste. Następnym, raczej trudnym, zadaniem jest znalezienie rozcięć, które mogłyby być powtarzalne. W przypadku podziałów pokazanych na rys. 54 nie można się obyć jednym wariancie rozcięcia, tak jak w podanych dotąd przykładach.



Rys. 54. Dwa podziały na figury samopodobne, które można rozwinąć w łańcuchy. Dla drugiego z tych podziałów sposób uzyskania odwzorowania peanowskiego podał W. Dębski (praca nieopublikowana)

Liczne przykłady podziałów figur na podobne do całości można znaleźć u Martina Gardnera w jednym z artykułów w „Scientific American"[161]. Autor nie zna rozcięć w łańcuchy dla innych podziałów, poza tymi, o których była mowa.

Krotność odwzorowań peanowskich

Przez *odwzorowanie krotności skończonej* rozumiemy odwzorowanie, którego wartości przyjmowane są w skończonej liczbie punktów. W. Hurewicz (1933) dowiódł, że *odwzorowanie peanowskie krotności skończonej musi mieć wartości co najmniej trzech różnych krotności*. Przedtem, z prac H. Hahna (1913) i S. Mazurkiewicza (1915), było wiadomo, że *odwzorowanie peanowskie musi mieć wartości, których krotność wynosi co najmniej 3*[162]. Twierdzenie Hurewicza jest mało znane i nie znalazło się w kursie topologii, nawet w tej formie, w jakiej zostało tu wypowiedziane. Oryginalny dowód Hurewicza jest dowodem twierdzenia od razu o wiele ogólniejszego, wymagającego wyjścia poza elementarne środki topologii, którymi się tu posługujemy.

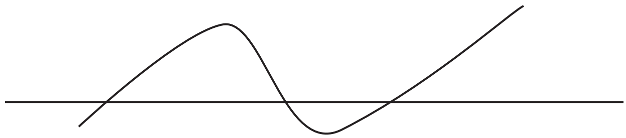
Twierdzenie o trzech krotnościach wyniknie tu z twierdzenia pomocniczego, do którego dowodu przystępujemy.

Wartość y odwzorowania $f : X \to Y$ nazwijmy *wartością otwartości*, jeśli dla każdego punktu x, w którym jest przyjęta, wartość ta leży we wnętrzu obrazu jak-

[161] P. także M. Gardner: *Matiematiczeskije Dosugi*. Moskwa, Mir 1972; rozdział 24 (tłum. z ang., 1966, 1969). Por. również G.E. Martin: *Transformation Geometry. An Introduction to Symmetry*. Springer 1982, s. 129—130.

[162] W. Hurewicz: *Über dimensionserhöhende stetige Abbildungen*. Journ. für reine und angewandte Math. 169 (1933), s. 71—78. H. Hahn: *Über die Abbildung einer Strecke auf ein Quadrat*. Ann. di Math., Seria III, 21 (1913), s. 33—55; S. Mazurkiewicz: *O punktach wielokrotnych krzywych wypełniających obszar płaski (Sur les points multiples des courbes qui remplits une aire plane)*. Prace Mat.-Fiz. 26 (1915), s. 113—120; *Travaux de topologie*, s. 48—53.

kolwiek wziętego otoczenia U punktu x, tj. jeśli $y \in \operatorname{int} f(U)$. Wartości niebędące wartościami otwartości są dla odwzorowań ciągłych — przy naturalnych założeniach co do przestrzeni — raczej wyjątkowe: dla funkcji rzeczywistych są to wartości, których poziomice nie trafiają wykresów w ekstremach lokalnych (rys. 55).



Rys. 55. Jeszcze A. Schoenflies (1900), a potem Sierpiński (1912) (nie zakładając ciągłości) wiedzieli, że poziomic przecinających wykres w ekstremach właściwych jest nawyżej przeliczalnie wiele

Niech X będzie przestrzenią metryczną zwartą i niech B będzie jej ustaloną bazą przeliczalną. Niech f będzie odwzorowaniem ciągłym przestrzeni X na przestrzeń metryczną Y. Usuńmy z Y brzegi zbiorów $f(A)$, gdzie A są domknięciami zbiorów z bazy B. Usuwamy w ten sposób przeliczalnie wiele zbiorów domkniętych rzadkich (brzegi zbiorów domkniętych są rzadkie (i domknięte); zbiory $f(A)$ są domknięte, będąc podzbiorami zwartymi przestrzeni metrycznej. Usuwamy więc z Y zbiór I-tej kategorii typu F_σ. Pozostała Gδ-a gęsta składa się z samych wartości otwartości odwzorowania f.

Otrzymujemy w ten sposób zapowiedziane

Twierdzenie pomocnicze. *Wartości otwartości odwzorowania ciągłego przestrzeni metrycznej zwartej na przestrzeń metryczną stanowią w niej zbiór gęsty typu G_δ.*

Twierdzenie[163]. *Wartości dwu najwyższych krotności nie mogą być wartościami otwartości odwzorowania peanowskiego, jeśli leżą we wnętrzu obrazu.*

Wobec tego, że wartości otwartości istnieją (czego dowiedliśmy), z wypowiedzianego twierdzenia wynika, że *odwzorowanie peanowskie musi mieć wśród swych wartości co najmniej trzy o różnych krotnościach*, co jest treścią zapowiedzianego na wstępie twierdzenia.

Dowód twierdzenia. Niech $f : I \to E^2$ będzie odwzorowaniem ciągłym, krotności skończonej, odcinka domkniętego prostej w płaszczyznę i niech y będzie wartością tego odwzorowania leżącą we wnętrzu obrazu. Niech

$$f^{-1}(y) = \{x_1,\ldots,x_k\},\ x_i \neq x_j, \qquad \text{jeśli } i \neq j.$$

Przyjmijmy, że y jest wartością otwartości, i że liczba k jest jedną z dwu najwyższych krotności odwzorowania f.

[163] W. Dębski, J. Mioduszewski: *Multiplicities of Peano maps. On a less known theorem by Hurewicz*. Ann. Mathematicae Silesianae 9 (1995), s. 11—15.

Niech U_j będą przedziałami wokół x_j wzajemnie rozłącznymi. Wartość y leży we wnętrzu każdego ze zbiorów $f(U_j)$. Niech W będzie obszarem wokół punktu y zawartym w przekroju zbiorów int $f(U_j)$.

Weźmy pod uwagę jeden ze zbiorów U_j, niech będzie to zbiór U_1, a w nim otoczenie U punktu x_1 na tyle małe, by $f(\bar{U})$ zawierało się we wnętrzu obszaru W. Nadal $y \in \operatorname{int} f(\bar{U})$ (jest nawet $y \in \operatorname{int} f(U)$, bo y jest wartością otwartości). Z obu wymienionych przesłanek wynika, że brzeg zbioru $f(U)$ rozcinający obszar zawiera kontinuum wielopunktowe[164]. Niech więc C będzie kontinuum wielopunktowym[165] zawartym w brzegu zbioru $f(\bar{U})$ i przy tym takim, że żadna z wartości odwzorowania f przyjęta na końcach przedziału U nie należy do C.

Jeśli $c \in C$, to $c \in f(U)$, bo wartości przyjęte na końcach przedziału U nie należą do C. Ponieważ brzeg zbioru $f(\bar{U})$ jest rzadki w obszarze W, więc punkt c jest granicą ciągu punktów zbioru W leżących poza zbiorem $f(\bar{U})$. Punkty tego ciągu są wartościami odwzorowania f przyjętymi na punktach zbioru U_1 (bo $f(U_1) \supset W$), przy tym leżącymi poza zbiorem $\bar{U}$. Ich punkty skupienia leżą poza zbiorem U i są przeprowadzane przez odwzorowanie f na punkt c. Punkt c jest więc wartością odwzorowania f w co najmniej jednym punkcie spoza U. Ponieważ punkt c — jako punkt zbioru W — jest przyjęty jako wartość w każdym ze zbiorów (rozłącznych) U_j, więc jest wartością odwzorowania f w co najmniej $k + 1$ punktach.

W przypadku, gdy liczba k jest największą krotnością, dowód jest zakończony wobec otrzymanej sprzeczności.

W przypadku, który pozostał, rozważmy odwzorowanie f zawężone do $f^{-1}(C)$. Z poprzedniego rozumowania, wobec dowolności c, odwzorowanie to jest stałej krotności (najwyższej dla f), tj. tej samej krotności r dla każdej wartości.

Niech c' będzie wartością otwartości rozważanego odwzorowania zawężonego. Jest $f^{-1}(c') = \{c'_1, \ldots, c'_r\}$, gdzie wszystkie c'_j są różne. Niech V_j będą otoczeniami otwartymi punktów c'_j, załóżmy, że wzajemnie rozłącznymi. Wartość c' leży we wnętrzach względem C zbiorów $f(V_j)$.

Niech C' będzie kontinuum wielopunktowym zawartym w przekroju wnętrz (względem C) zbiorów $f(V_j)$[166]. Mamy

$$f^{-1}(C') = C'_1 \cup \ldots \cup C'_r,$$

gdzie $C'_j = V_j \cap f^{-1}(C')$. Zbiory C'_j są wzajemnie rozłączne (leżą we wzajemnie rozłącznych zbiorach V_j) i są zwarte (co wynika ze zwartości $f^{-1}(C')$ przy rozłączności zbiorów otwartych V_j). Ponieważ kontinuum C' leży w przekroju zbiorów $f(U_j)$, więc każdy punkt tego kontinuum jest przyjęty jako wartość w każdym ze zbiorów V_j, co znaczy, że w każdym ze zbiorów C'_j, przy tym dokładnie raz, bo V_j są wzajemnie rozłączne. Stąd wniosek, że odwzorowanie f

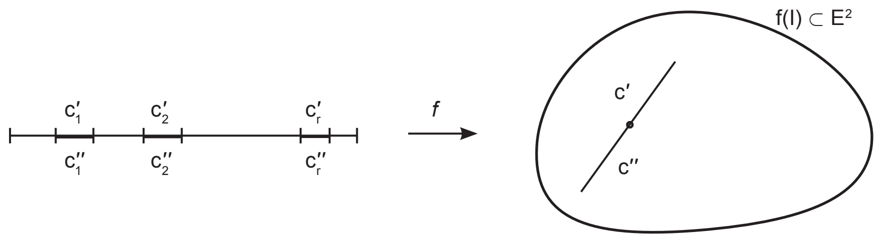
164 Zbiór zwarty zerowymiarowy, a więc niezawierający kontinuów wielopunktowych, nie rozcina żadnego obszaru płaskiego.

165 Tu i dalej skorzystać trzeba z lematu Janiszewskiego „o dochodzeniu do brzegu".

166 Istnienie kontinuum C′ wynika z lematu Janiszewskiego „o dochodzeniu do brzegu".

zawężone do C'_j jest (dla każdego j) wzajemnie jednoznaczne, a wobec zwartości jest homeomorfizmem na kontinuum C'.

Zatem wszystkie C'_j są podkontinuami wielopunktowymi odcinka I, a więc odcinkami, przy tym wzajemnie rozłącznymi. Kontinuum C' jest więc łukiem leżącym we wnętrzu płaskim zbioru $f(I)$.



Rys. 56. Dowód twierdzenia Hurewicza

Niech c'' będzie punktem łuku C' niebędącym jego końcem (por. rys. 56). Punkty c''_j przeciwobrazu $f^{-1}(c'') = \{c''_1,..., c''_r\}$ są punktami wewnętrznymi odcinków C'_j. Zatem suma $C'_1 \cup \ldots \cup C'_r$ jest otoczeniem przeciwobrazu $f^{-1}(c'')$ punktu c''; nadmieńmy, że jest to przeciwobraz pełnego odwzorowania f, bo krotność wartości leżących na C jest najwyższa. Jako obraz otoczenia przeciwobrazu punktu c'' obraz sumy odcinków C'_j jest otoczeniem punktu c'' w $f(I)$. Ale z drugiej strony wiemy, że leży na łuku C', rzadkim w $f(I)$. Sprzeczność.

Uwagi. Odwzorowanie peanowskie, jeśli jest krotności skończonej, musi mieć (jak było dowiedzione) wartości co najmniej trzech krotności. *Czy wszystkie trójki, czwórki etc. się realizują?* Klasyczne odwzorowania peanowskie są odwzorowaniami nieprzywiedlnymi. Wartości krotności 1 tworzą wtedy zbiór gęsty typu G_δ pokrywający się z wartościami otwartości odwzorowania. Czy tak jak we wszystkich znanych przykładach, *muszą się wtedy pojawić wartości krotności 2*?[167] Czy jest możliwe odwzorowanie peanowskie o krotnościach 1 i ∞?

To, czego dowiódł Hurewicz, jest twierdzeniem ogólniejszym i orzeka z grubsza tyle, że jeśli przestrzeń metryczna ośrodkowa nie odbiega za wiele własnościami od rozmaitości, to każde jej odwzorowanie ciągłe, którego obrazem jest przestrzeń (metryczna ośrodkowa) o wymiarze większym o m od wymiaru przestrzeni odwzorowywanej, jeśli jego wartości są krotności skończonej, musi mieć wartości co najmniej $m + 2$ różnych krotności. W rozważanym tu przypadku odwzorowanie podwyższało wymiar o 1, stąd liczba 3.

Z dowiedzionego twierdzenia wynika, że odwzorowania peanowskie krotności skończonej nie mogą być otwarte. Wynika to jednak już z twierdzenia charakteryzującego odwzorowania otwarte odcinka (*Wykład V*, s. 75).

P. Salem i A. Zygmund (1945) zwrócili uwagę na odwzorowania peanowskie, określone na $|z| = 1$, które otrzymuje się w rezultacie przedłużenia na $|z| = 1$ funkcji analitycznej danej na $|z| < 1$[168], obraz zbioru $|z| = 1$ wypełnia całość obrazu funkcji na $|z| \leqslant 1$.

---

[167] W. Dębski twierdzi, że nie muszą, jednakże odpowiedni przykład nie jest znany autorowi.

[168] R. Salem, A. Zygmund: *Lacunary power series and Peano curves*. Duke Math. J. 12

Na istnienie odwzorowań peanowskich uzyskiwanych jako obrazy zbiorów osobliwości funkcji analitycznych zwrócił uwagę W. Wolibner (1932), który dowiódł, że *funkcja zespolona zmiennej zespolonej, ciągła, ograniczona i analityczna poza zbiorem doskonałym jej punktów osobliwych przyjmuje na tym zbiorze wszystkie swe wartości.* Tego rodzaju funkcja jest więc odwzorowaniem peanowskim na każdym łuku zawierającym zbiór osobliwości[169]. Istnieją funkcje spełniające założenia twierdzenia Wolibnera; D. Pompéju (1905). Jest także przykład P. Urysohna (1924). Na temat tego kierunku poszukiwań por. książki W.W. Gołubiewa (1961) i P. Hille'a (1962)[170].

O różniczkowalności odwzorowań peanowskich

Niech f będzie odwzorowaniem ciągłym odcinka liczb rzeczywistych w płaszczyznę. Niech $p(t)$ będzie odciętą, a $q(t)$ rzędną wartości $f(t)$. Niech A będzie zbiorem tych t, dla których funkcja $p(t)$ ma pochodną. Niech B będzie odpowiednim zbiorem dla funkcji $q(t)$.

Twierdzenie. Zbiory $f(A)$ i $f(B)$ są miary zero.

Dowód. Zbiory $f(A)$ i $f(B)$ są mierzalne. Jest tak, bo zbiory A i B — jako zbiory punktów różniczkowalności funkcji ciągłych — są borelowskie (por. przyp. 1), a ich obrazy przez odzorowanie ciągłe pozostają zbiorami analitycznymi, a więc mierzalnymi. Wobec symetrii założeń wystarczy zająć się jednym z tych zbiorów, np. zbiorem $f(A)$.

Przypuśćmy, że zbiór $f(A)$ jest miary dodatniej. Z twierdzenia Fubiniego wynika, że wtedy dla nieprzeliczalnie wielu y sekcje poziome M_y zbioru $f(A)$ są zbiorami mierzalnymi miary (liniowej) dodatniej. Przeciwobrazy $f^{-1}(M_y)$ tych zbiorów M_y — tj. zbiory $A \cap q^{-1}(y)$ — są podzbiorami mierzalnymi odcinka. Zbiory te są wzajemnie rozłączne (wobec wzajemnej rozłączności zbiorów M_y). Ponieważ jest ich nieprzeliczalnie wiele, więc co najmniej jeden z nich — niech będzie to zbiór $H = f^{-1}M_b$ — jest miary zero. Funkcja $p(t)$ ma pochodną w każdym punkcie t zbioru H. Z twierdzenia Saksa o mierze obrazu — p. przypis 2 — wnioskujemy, że miara obrazu $p(H)$ zbioru H jest nie większa niż $\int_H |p'(t)| dt$, gdzie $p'(t)$ oznacza — istniejącą w punktach t zbioru H — pochodną.
Ale całka w tym oszacowaniu jest równa 0, bo zbiór H jest miary zero. Zatem miara zbioru $p(H)$ jest równa 0. Z drugiej strony zbior $p(H)$ jest — wobec określenia zbioru H — rzutem sekcji M_b na oś odciętych i ma miarę dodatnią, taką jak sekcja M_b. Otrzymana sprzeczność kończy dowód.

(1945), s. 569—578. Jest także późniejsza praca na ten temat G. Piraniana, C.W. Titusa i G.S. Younga: *Conformal mappings of Peano Curves*. Michigan Math. J. (1952), s. 68—72.

[169] W. Wolibner: *O zbiorach wartości funkcji analitycznych ograniczonych, wszędzie oznaczonych, o zbiorach osobliwości punktokształtnych, przyjmowanych na zbiorach swych osobliwości*. Sprawozdania z posiedzeń Towarzystwa Naukowego Warszawskiego 25, 1932, Classe III.

[170] D. Pompéju: *Sur la continuite' des fonctions de variables complexes*. Ann. Fac. Sci. Toulouse 7 (1905), s. 314; P. Urysohn: *Sur une fonction analytique partout continue*. Fund. Math. 3(1924), s. 144—150; W.W. Gołubiew: *Odnozacznyje analiticzeskije funkcji. Awtomorfnyje funkcji*. Moskwa 1961, s. 140 i 438 (komentarz 32). P. Hille: *Analytic function theory*. I—II. 1959—1962.

Wnioskujemy stąd, że *jeśli dla każdego t chociażby jedna z funkcji — p lub q — ma w t pochodną, to obraz odcinka przez funkcję ciągłą $f=(p, q)$ jest miary zero*. Istotnie, zbiory A i B wypełniają wtedy bowiem całą dziedzinę funkcji f, a zbiory $f(A)$ i $f(B)$ — cały obraz. Wobec dowiedzionego twierdzenia obraz musi być miary zero.

W szczególności *żadna z funkcji składowych odwzorowania peanowskiego nie może mieć wszędzie pochodnej.*

Dzięki założeniu ciągłości odwzorowania mogliśmy w dowodzie twierdzenia korzystać z mierzalności obrazu[171]. Zbiory $f(A)$ i $f(B)$, jako obrazy ciągłe zbiorów borelowskich, są analityczne, a więc mierzalne; por. K. Kuratowski, A. Mostowski: *Teoria mnogości*. Warszawa 1978. Na temat problemu różniczkowalności funkcji składowych w sytuacjach, gdy ciągłości nie zakładamy por. prace M. Moraynego (1987) oraz M. Moraynego i J. Cichonia (1984)[172].

W klasycznych odwzorowaniach peanowskich Peany i Hilberta funkcje składowe $x(t)$ i $y(t)$ są nigdzie nieróżniczkowalne.

Zauważmy bowiem, że odwzorowanie Peany przekształca odcinki długości $1/9^n$ na kwadraty o boku $1/3^n$. Zatem dla każdego t znajdą się punkty t' w odległości od siebie nie większej niż $1/9^n$, dla których odległości między $x(t)$ i $x(t')$ są w odległości co najmniej $1/3^n$. Odpowiedni iloraz różnicowy będzie więc nie mniejszy niż 3^n. Stąd nieistnienie pochodnej funkcji x w punkcie t. Dotyczy to także funkcji y.

To samo dotyczy odwzorowania Hilberta.

Trudniej jest o przykłady odwzorowań peanowskich, których funkcje składowe byłyby w pewnych punktach różniczkowalne. M. Szarek (praca magisterska, 1999) zbudował odwzorowania peanowskie, których funkcje składowe są różniczkowalne na pewnych zbiorach F_σ *I*-ej kategorii.

---

[171] Dokładne oszacowanie klasy borelowskiej zbioru punktów nieróżniczkowalności funkcji ciągłej podał Z. Zahorski; jest to zbiór będący sumą zbioru typu G_δ i zbioru $G_{\delta\sigma}$, przy czym ten drugi jest miary zero. Według J.S. Lipińskiego, A. Brudno (1943) uwolnił twierdzenie Zahorskiego od założenia ciągłości. Zahorski dowiódł również twierdzenia odwrotnego: każdy zbiór wspomnianego typu jest zbiorem punktów nieróżniczkowalności pewnej funkcji ciągłej.

Twierdzenie Saksa. Jeśli funkcja F określona na przedziale ma w każdym punkcie podzbioru mierzalnego Q tego przedziału pochodną, to

$$\mu F(Q) \leqslant \int_Q |F'(t)|\, dt$$

Twierdzenie to zawarte zostało w *Teorji całki* S. Saksa (Warszawa 1930), s. 229. Wcześniej można je znaleźć w pracy S. Saksa: *Sur les fonctions continues a un nombre derive sommable*. Fund. Math. 7 (1925), s. 290—295.

[172] M. Morayne: *On differentiability of Peano type functions I, II*. Coll. Math. 53 (1987), s. 127—132, 133—135, oraz M. Morayne i J. Cichoń: *On differentiability of Peano type functions III*. Proc. Amer. Math. Soc. 92 (1984), s. 432—438.

Wykład VII. Kontinua niemetryczne

∗ Łukowa spójność i łukowa lokalna spójność obrazów ciągłych odcinków uogólnionych ∗ Ich stopień ośrodkowości i waga ∗ Nieprzenoszenie się twierdzenia Hahna—Mazurkiewicza na kontinua niemetryczne ∗ Odwzorowania na produkty X × Y ∗ Wnioski co do odwzorowań peanowskich ∗ O kontinuach lokalnie spójnych, które nie są łukowo spójne

Pojęcie lokalnej spójności nie traci sensu i znaczenia w zakresie ogólniejszym kontinuów niemetrycznych klasy T_2.

Dostosujmy pojęcia związane z lokalną spójnością do tej ogólniejszej sytuacji.

Kontinuum nazwiemy *łukowo spójnym — w sensie ogólniejszym —* jeśli każde dwa jego punkty dadzą się w nim połączyć *łukiem uogólnionym*,tj. obrazem homeomorficznym pewnego odcinka uogólnionego[175]. Podobnie jak dotąd, kontinuum nazwiemy *lokalnie łukowo spójnym w punkcie x*, jeśli każde otoczenie otwarte U punktu x będzie zawierało otoczenie V (niekoniecznie otwarte) punktu x takie, że każdy punkt x' z otoczenia V da się połączyć w U z punktem x łukiem uogólnionym.

Lokalna łukowa spójność w punkcie pociąga lokalną spójność w tym punkcie (dowód ze s. 89 bez zmian).

Kontinuum nazwiemy *lokalnie łukowo spójnym*, jeśli jest lokalnie łukowo spójne w każdym punkcie. Jeszcze jednym zakresem kontinuów są kontinua (klasy T_2), które są obrazami ciągłymi odcinków (łuków) uogólnionych.

Z diagramu wynikań ze s. 92 prawdziwymi pozostają dwa:

kontinua lokalnie spójne $\overset{(I)}{\Leftarrow}$ *kontinua lokalnie łukowo spójne* $\overset{(II)}{\Leftarrow}$ *obrazy ciągłe odcinków uogólnionych.*

Wynikanie (I) nie sprawia trudności i była już o tym mowa. Dowód wynikania (II) jest nieco trudniejszy i wymaga przygotowania, co zrobimy w pierwszej części wykładu.

Dalszym celem tego wykładu będzie przedstawienie — przede wszystkim za pracami S. Mardešicia — problemów związanych z odwróceniem wspomnianych implikacji. Okazuje się, że odpowiednich twierdzeń odwrotnych nie ma, co znaczy, że twierdzenia Hahna—Mazurkiewicza i Mazurkiewicza—Moore'a nie dają się przenieść na kontinua niemetryczne T_2. Te negatywne wyniki

[175] Używa się również nazwy *kontinuum uporządkowane.*

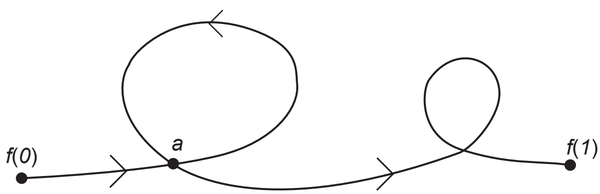
poprzedzi przedstawienie wyników dotyczących budowy obrazów ciągłych kontinuów uporządkowanych i ogólniej — obrazów ciągłych przestrzeni uporządkowanych zwartych. Osobliwością zakresu przestrzeni zwartych uporządkowanych są trudności w odwzorowaniu ich na produkt dwu tego rodzaju przestrzeni, jeśli nie są one metryczne. Stąd nieistnienie zjawiska Peany w zakresie kontinuów uporządkowanych niemetrycznych. Na tę osobliwość zwrócił uwagę po raz pierwszy Mardešić (1960), co było ważną motywacją dla zainteresowania się kontinuami niemetycznymi.

*

Łukowa spójność obrazów ciągłych odcinków uogólnionych

Wynikanie (II) w pewnych specjalnych sytuacjach można uzyskać bardzo prosto.

Niech f: $[0, 1] \to X$ (załóżmy, że X jest T_2) będzie odwzorowaniem ciągłym mającym skończenie wiele wartości wielokrotnych krotności skończonej, np. takim, jak przedstawione trajektorią na rys. 57, która ma samoprzecięcie w punkcie a. Odwzorowanie to ma w punkcie *a pętlę*, co oznacza istnienie na odcinku [0, 1] przedziału (x, y) takiego, że $f(x) = f(y) = a$. Likwidujemy tę pętlę przez usunięcie z odcinka przedziału (x, y) i sklejenie pozostałości punktami x i y. Powstaje znowu odcinek, a odwzorowanie wyznaczone na nim przez f nie ma już pętli w punkcie a. W podobny sposób likwidujemy dalsze pętle, jeśli pozostały.



Rys. 57. Obraz ciągły odcinka o skończonej ilości samoprzecięć. Pętla w punkcie a

Gdy samoprzecięć jest skończenie wiele, można w ten sposób zlikwidować wszystkie pętle i otrzymać łuk łączący $f(0)$ i $f(1)$. Dowód wymaga wykończenia przez indukcję.

Pętli może być wszakże nieskończenie wiele. W celu ich usunięcie posłużymy się lematem Kuratowskiego—Zorna.

Przed sformułowaniem twierdzenia opiszemy ogólnie operację, która pojawiła się już w rozpatrzonym przypadku szczególnym i która pojawi się w dowodzie twierdzenia.

Niech A będzie zbiorem uporządkowanym liniowo bez luk i bez punktów izolowanych (to drugie oznacza, że skoki tego uporządkowania są ze sobą rozłączne). Niech $q : A \to B$ będzie odwzorowaniem ilorazowym zlepiającym pary punktów w skokach. Topologia ilorazowa zbioru B jest tym samym, co topologia uporządkowania określonego warunkiem $b \leqslant b' \Leftrightarrow a \leqslant a'$, gdzie $q(a) = b$ i $q(a') = b'$; uporządkowanie zbioru B nie ma już skoków. Jeśli A jest zwarte i X jest T_2.

Twierdzenie. *Obrazy ciągłe odcinków uogólnionych są łukowo spójne, jeśli są T2.*

Dowód. Niech f będzie odwzorowanie ciągłym odcinka uogólnionego $I = [\alpha, \beta]$ w przestrzeni X klasy T_2. Niech a i b będą dowolnymi dwoma punktami zbioru $f(I)$. Pokażemy, że a i b można połączyć w X łukiem uogólnionym. Nie zmniejszy ogólności dalszych rozważań, jeśli przyjmiemy, że $f(\alpha) = a$, $f(\beta) = b$, oraz że wartości a i b nie są przyjmowane w żadnych innych punktach odcinka I.

Weźmy pod uwagę podzbiory domknięte A odcinka I powstałe przez usuwanie z wnętrz tego odcinka maksymalnych przedziałów, na których końcach odwzorowanie f przyjmuje te same wartości. Otrzymujemy w ten sposób zbiory A takie, że

(1) $\alpha \in A$, $\beta \in A$,

(2) jeśli (x, y) jest składową dopełnienia zbioru A, to $f(x) = f(y)$ i nie istnieje przedział większy o końcach w zbiorze A, różny od całego odcinka I, na którego końcach odwzorowanie f ma te same wartości.

Warunki (1) i (2) zapewniają, że zbiory $f(A)$ są kontinuami łączącymi w X punkty a i b.

Jeśli $\mathcal{L}$ jest łańcuchem złożonym z tych zbiorów, to przekrój $\bigcap \mathcal{L}$ tego łańcucha ma nadal własności (1) i (2). Własność (1) jest oczywista. Aby sprawdzić (2), weźmy pod uwagę jakąkolwiek składową (x, y) dopełnienia zbioru $\bigcap \mathcal{L}$. Mamy $x \in A$ i $y \in B$ dla pewnych elementów A i B łańcucha $\mathcal{L}$. Jest $A \subset B$ lub $B \subset A$, zatem x i y są punktami jednego ze zbiorów A i B; przyjmijmy, że zbioru A. Będąc końcami składowej dopełnienia zbioru $\bigcap \mathcal{L}$, są końcami składowej dopełnienia zbioru A. Jest więc — wobec (2) — $f(x) = f(y)$ i w A nie ma innej pary punktów o tej własności, a więc tym bardziej w $\bigcap \mathcal{L}$.

Założenia lematu Kuratowskiego—Zorna są zatem spełnione. Rozważmy zbiór A_* minimalny wśród zbiorów o własnościach (1) i (2): mamy więc $\alpha \in A_*$ i $\beta \in A_*$ oraz $f(x) \neq f(y)$ dla punktów zbioru A_* nie tworzących skoku. Odwzorowanie wyznaczone przez A_* według uwag przed dowodem — określone na odcinku uogólnionym B_* powstałym z A_* przez zlepienie skoków — jest jednokrotne, a jego obraz jest łukiem o końcach w a i b.

Twierdzenie w tej formie pochodzi od Kelleya (por. przypis na s. 39 (punkt (3) książki Whyburna (1942)); por. również A.J. Warda[176]. W przypadku metrycznym — jak pisze Kerékjártó w *Vorlesungen über Topologie* na s. 93. — dowód podał Kaluzsay, a także Tietze. Ten rodzaj dowodu spotykamy również u Mazurkiewicza[177].

---

[176] A.J. Ward: *Notes on general typology II. A non-metric image of an ordered compactum*. Proc. Cambridge Phil. Soc. **61** (1965), s. 979—880.

[177] S. Mazurkiewicz: *Sur l'arithmétisation des continus*. C.R. Varsowie **6** (1913), s. 305—311.

Wniosek. *Obrazy ciągłe odcinków uogólnionych są lokalnie łukowo spójne, jeśli są T_2.*

D o w ó d. Niech $f : I \to X$ będzie odwzorowaniem ciągłym odcinka uogólnionego na przestrzeń klasy T_2. Niech $x \in X$. Niech U będzie otoczeniem otwartym punktu x. Dla każdego y należącego do $f^{-1}(x)$ istnieje przedział otwarty V taki, że $y \in V$ i $f(\overline{V}) \subset U$, gdzie $\overline{V}$ jest odcinkiem będącym domknięciem w I przedziału V. Wobec zwartości skończenie wiele spośród przedziałów V, niech będą to $V_1, ..., V_k$, pokrywa zbiór $f^{-1}(x)$. Obrazy $f(\overline{V})$ są, na mocy dowiedzionego twierdzenia, kontinuami łukowo spójnymi. Zbiór $K = f(\overline{V}_1) \cup ... \cup f(\overline{V}_k)$ jest zawarty w U, jest otoczeniem punktu x i jest kontinuum łukowo spójnym jako suma skończonej ilości kontinuów łukowo spójnych mających punkt wspólny (punkt x). Jeśli x' w K, a więc w U. Stąd lokalna łukowa spójność w punkcie x, bo U było dowolne i znaleźliśmy dla U otoczenie K punktu x zawarte w U czyniące zadość wymaganiom stawianym lokalnej spójności.

Odnotujmy dla porządku, że wobec wspomnianego już twierdzenia (z *Wykładu V*, s. 92), *obrazy ciągłe odcinków uogólnionych są lokalnie spójne*.

*

Przez *okrąg uogólniony* rozumiemy kontinuum powstałe z odcinka uogólnionego przez sklejenie jego końców. Okręgi uogólnione nie są już kontinuami uporządkowanymi, mają jednak na sobie porządek cykliczny.

Odwzorowanie ciągłe $g : S \xrightarrow{\text{na}} X$ okręgu uogólnionego S nazwiemy *prostym*, jeśli okrąg S nie zawiera przedziałów (x, x'), dla których

(∗) $g(S - (x, x')) = X$ i $g(x) = g(x')$.

Wymagamy więc, by parametryzacja g kontinuum X nie miała pętli, które można by usunąć bez zmniejszenia zbioru wartości.

Twierdzenie. *Jeśli przestrzeń X jest obrazem ciągłym okręgu uogólnionego, to jest obrazem pewnego okręgu uogólnionego przez odwzorowanie proste.*

D o w ó d. Niech $f : S \to X$ będzie odwzorowaniem ciągłym okręgu uogólnionego S na przestrzeń (wielopunktową) X. Weźmy pod uwagę podzbiory domknięte A okręgu S taki, że:

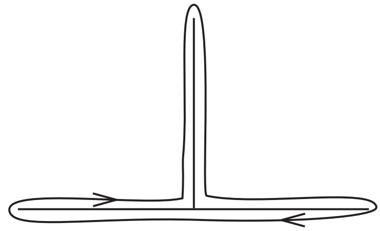
(3) składowa dopełnienia zbioru A są maksymalnymi przedziałami okręgu mającymi końce w A, na których f przyjmuje równe wartości i po usunięciu których obraz pozostałości będzie nadal X.

Z własności (3) wynika, że dla każdego ze zbiorów A jego skoki są albo równe, albo rozłączne.

Biorąc łańcuch $\mathcal{L}$ złożony ze zbiorów o własności (3), dostaniemy zbiór domknięty $\cap \mathcal{L}$ mający nadal tę własność. Na mocy lematu Kuratowskiego—Zorna istnieją zbiory minimalne ze względu na własność (3). NIech A_* będzie tego rodzaju zbiorem. Zlepiając skoki zbioru $\cap \mathcal{L}$ (są one wzajemnie rozłączne), dostaniemy okrąg uogólniony. Sposobem opisanym w poprzedniej konstrukcji dostaniemy odwzorowanie — okazuje się ono odwzorowaniem prostym — otrzymanego okręgu uogólnionego na X.

Nietrudno jest dowieść, że odwzorowania proste okręgu na odcinek i na trójnóg mają postać taką, jak na rys. 58.

Rys. 58 a. Odwzorowanie proste na odcinek



Rys. 58 b. Odwzorowanie proste na trójnóg

*

Z *Wykładu II* wiemy, że stopień ośrodkowości kontinuów uporządkowanych jest równy ich wadze. To samo jest prawdą dla ich obrazów ciągłych, jeśli są T_2. Przy koniecznym wtedy założeniu spójności obrazu, własność tę mają również obrazy ciągłe przestrzeni zwartych uporządkowanych — niekoniecznie spójnych. Za Mardešiciem i Papiciem (1960) przeprowadzimy dowód tego ogólniejszego twierdzenia w przypadku, kiedy obraz jest lokalnie spójny[178]. Zawiera to w sobie zapowiedziane na początku twierdzenie o obrazach ciągłych kontinuów uporządkowanych, bo jak wiemy, obrazy ciągłe kontinuów uporządkowanych są lokalnie spójne.

Rodzina $\mathcal{B}$ zbiorów otwartych niepustych jest nazywana *p-bazą*, jeśli każdy zbiór otwarty niepusty zawiera pewien element rodziny $\mathcal{B}$[179]. Nie wymagamy, by element p-bazy był otoczeniem z góry danego punktu x należącego do U. Oczywiście, bazy są p-bazami. Przez *p-wagę* rozumie się minimum mocy p-baz danej przestrzeni. Jest zawsze: *stopień ośrodkowości* $\leqslant$ *p-waga* $\leqslant$ *waga*.

Twierdzenie. *W zakresie przestrzeni uporządkowanych p-waga jest równa stopniowi ośrodkowości.*

Dowód. Niech K będzie przestrzenią uporządkowaną. Wystarczy dowieść, że p-waga $K \leqslant$ stopień ośrodkowości K. Niech D będzie podzbiorem gęstym w K. Biorąc przedziały niepuste o końcach w K oraz te spośród odcinków i półodcinków o końcach w K, które są otwarte, dostaniemy p-bazę w K o mocy nie większej niż moc D.

*

Odwzorowanie ciągłe $f : X \xrightarrow{\text{na}} Y$ nazywane jest *nieprzywiedlnym*, jeśli z $f(A) = Y$ wynika $A = X$ dla podzbiorów domkniętych A przestrzeni X. Jeśli $f : X \xrightarrow{\text{na}}$

---

[178] S. Mardešić, P. Papić: Continuous images of ordered continua. Glasnik Mat.-Fiz. i Astronom. **15** (1960), s. 171—178; por. P. Papić: *Sur les images continues des continus ordonnés*. Symposium, Praga 1961, s. 296—297. Od założenia lokalnej spójności uwolnił twierdzenie L.B. Treybig: *Concerning continua which are images of compact ordered spaces*. Duke Math. J. 32 (1965), s. 417—422.

[179] Jest to pojęcie raczej naturalne, jeśli przypomnimy, że pojawia się *implicite* w dowodzie twierdzenia Baine'a. Nie wiążemy tego pojęcia z pojęciem pseudobazy z *Wykładu III*.

Y jest odwzorowaniem ciągłym, X jest zwarte, a Y jest klasy T_1, to istnieje A domknięte w X takie, że $f \mid A : A \xrightarrow{\text{na}} Y$ jest nieprzywiedlne; dowód dostaje się przez zastosowanie lematu Kuratowskiego—Zorna.

Nie jest nieprzywiedlne rzutowanie pasa płaskiego $-1 \leqslant y \leqslant 1$ na oś x-ów, natomiast jest nieprzywiedlne rzutowanie na oś x-ów sinusoidy zagęszczonej (domknięcie wykresu funkcji $y = \sin \frac{1}{x}$) w nim zawartej. Odwzorowania peanowskie budowane za pomocą rozcięć (*Dodatek*) są wszystkie nieprzywiedlne.

Nie wymaga dowodu.

Lemat. *W odwzorowaniu nieprzywiedlnym (przestrzeni zwartej T_2 na przestrzeń T_2) wnętrza obrazów zbiorów należących do p-bazy tworzą p-bazę w obrazie.*

Twierdzenie. *Jeśli przestrzeń X klasy T_2 jest obrazem ciągłym przestrzeni uporządkowanej zwartej, to jej p-waga jest równa jej stopniowi ośrodkowości.*

D o w ó d. Przyjmijmy, co — wobec lematu — nie zmniejsza ogólności, że X jest obrazem ciągłym przez odwzorowanie nieprzywiedlne $f : K \xrightarrow{\text{na}} X$ z pewnej przestrzeni uporządkowanej zwartej K. Jeśli D jest zbiorem gęstym w X, to selektor rodziny zbiorów $f^{-1}(x)$, gdzie $x \in D$, jest zbiorem gęstym w K (nieprzywiedlność f) tej samej mocy co D. Na mocy wcześniejszego twierdzenia przestrzeń K ma p-bazę mocy nie większej niż moc D; w rezultacie na mocy lematu przestrzeń X ma p-bazę nie przekraczającą mocy zbioru D. Nierówność przeciwna jest ogólnie prawdziwa.

Tezy tego twierdzenia nie można wzmocnić tak, by p-wagę zastąpić wagą (kontrprzykład: odcinek podwojonej prostej Sorgenfreya).

Kostki I^{2^m} dla $m \geqslant \aleph_0$ mają, na mocy twierdzenia Hewitta—Marczewskiego—Pondiczery'ego, stopień ośrodkowości m, a więc mniejszej niż 2^m. Tymczasem ich p-waga jest równa 2^m. Zatem[180] na mocy dowiedzionego twierdzenia kostki te nie mogą być obrazami ciągłymi przestrzeni uporządkowanych zwartych. Nie daje się tego stwierdzenia przenieść na I^n z dowolnym wykładnikiem nieskończonym; przeszkodzą są liczby kardynalne nieosiągalne.

*

Twierdzenie Mardešicia—Papicia. *Jeśli przestrzeń lokalnie spójna T_2 jest obrazem ciągłym przestrzeni uporządkowanej zwartej, to jej waga jest równa jej stopniowi ośrodkowości.*

D o w ó d. Niech $f : K \to X$ będzie odwzorowaniem ciągłym (nieprzywiedlnym) z przestrzeni uporządkowanej zwartej na przestrzeń lokalnie spójną T_2. Mając podzbiór gęsty mocy m w przestrzeni X, mamy (por. poprzedni dowód) podzbiór gęsty D mocy m w K.

Niech $\mathcal{B}$ będzie p-bazą w K złożoną z przedziałów o końcach w zbiorze D. Moc p-bazy $\mathcal{B}$ nie przekracza m. Pokażemy, że składowe wypukłości zbiorów int

---

[180] Tego, że kostka I^n nie ma p-bazy mocy $< n$ dowodzi się tak samo jak nieistnienia w tych przestrzeniach bazy mocy $< n$.

$f(V_1 \cup ... \cup V_k)$, gdzie $\{V_1,..., V_k\}$ są podrodzinami skończonymi p-bazy $\mathcal{B}$, tworzą bazę w X mocy nie przekraczającej m.

Istotnie, wymienione wyżej zbiory jako składowe zbiorów otwartych w przestrzeni lokalnie spójnej są otwarte. Ich ilość nie przekracza m, bo zbiorów $f(V_1 \cup ... \cup V_k)$ jest nie więcej niż m, a każdy taki zbiór ma nie więcej niż m składowych, bo X zawiera podzbiór gęsty mocy m.

Niech U będzie otwarte w X i niech $x \in U$. Dla każdego punktu y ze zbioru $f^{-1}(x)$ weźmy otoczenie otwarte W tego punktu należące do $\mathcal{B}$ i takie, że $f(\mathrm{cl}\ W) \subset U$, jeśli takie otoczenie istnieje. Jeśli takiego otoczenia nie ma, to y jest punktem skoku $y < y'$ (lub skoku $y' < y$) zbioru K. W tym przypadku mamy zbiór W = $(z, y]$, jeśli y będzie należał do skoku $y' < y$).

Określone w ten sposób zbiory W pokrywają cały przeciwobraz $f^{-1}(x)$ i (wobec zawartości) $W_1 \cup ... \cup W_k \supset f^{-1}(x)$ dla pewnej skończonej ich ilości. Jest $f(\mathrm{cl}\ W_1 \cup ... \cup W_k) \subset U$. Zauważmy, że $x \in \mathrm{int}\, f(W_1 \cup ... \cup W_k)$, bo dla pewnego otoczenia H punktu x jest $f^{-1}(H) \subset W_1 \cup ... \cup W_k$. Składowa punktu x w zbiorze $\mathrm{int}\, f(W_1 \cup ... \cup W_k)$ jest zbiorem otwartym zawartym w U. Dowód byłby więc zakończony, jeśliby wszystkie rozważane zbiory W_j należały do $\mathcal{B}$.

Jeśli zbiór W_j nie należy do $\mathcal{B}$ i jest postaci $(z, y]$, gdzie y $\in f^{-1}(x)$, z $\in D$ i y jest punktem skoku $y < y'$ (jeśli to będzie skok $y < y'$, to postępowanie będzie znalogiczne), to zbiór W_j powiększony o zbiór W będący półodcinkiem $[y', z)$, gdzie $z \in D$, lub zbiorem jednoelementowym $\{y'\}$, jeśli y' jest punktem izolowanym w K (wtedy $y' \in D$), tak aby $f(\mathrm{cl}\ W') \cup f(\mathrm{cl}\ (W_1 \cup ... \cup W_k)) = \emptyset$. Istnienie takiego zbioru W' wynika z ciągłości odwzorowania f wobec tego, że $f(y') \notin f(\mathrm{cl}\ W_1 \cup ... \cup W_k))$ (bo $f(y') \notin U$).

Zbiory V_j równe zbiorom W_j, jeśli te zbiory należały do $\mathcal{B}$, lub równe zbiorom W, powiększonym o opisany wyżej sposób, należą wszystkie do p-bazy $\mathcal{B}$. Składowa punktu x w zbiorze int $f(\mathrm{cl}\ (W_1 \cup ... \cup W_k))$, co uzupełnia dowód.

Wynika stąd zapowiedziany wcześniej

Wniosek. *Obrazy ciągłe kontinuum uporządkowanych mają ten sam stopień ośrodkowości co wagę.*

*

Obrazy ciągłe discontinuów Cantora nazywane są *przestrzeniami diadycznymi*, jeśli są T_2. Ciekawe jest porównanie tego zakresu przestrzeni z zakresem obrazów ciągłych przestrzeni zwartych uporządkowanych. N.A. Szanin[181] dowiódł, że *przestrzeń diadyczna uporządkowana jest metryzowalna* (jest wtedy homeomorficzna z podzbiorem domkniętym prostej rzeczywistej). Czy dla uzyskania tej tezy wystarczy założyć, że jest obrazem ciągłym przestrzeni zwartej uporządkowanej? Poprzednie twierdzenia dawałyby tę konkluzję, jeśli byłoby wiadomo, że przestrzeń diadyczna, której stopień ośrodkowości równa się wadze, jest metryzowalna. Tak jednak nie jest[182]. Odpowiedź na postawione pytanie jest mimo to twierdząca.

---

[181] N.A. Szanin: *O proizwiedienii topologiczeskich prostranstw*. Trudy Mat. Inst. im. Stiekowa 24, Moskwa—Leningrad 1948.

[182] Przykładem jest kostka Tichonowa I^m, gdzie m jest liczbą kardynalną nieosiągalną.

Twierdzenie (Mardešić—Papić, (1962)[183]). *Przestrzenie diadyczne są obrazami ciągłymi przestrzeni uporządkowanych zwartych jedynie wtedy, kiedy są metryzowalne.*

Szkic dowodu. W topologii uporządkowania waga w punktach nie przekracza liczby Suslina. Stąd wobec założonej zwartości *dla dowolnych podzbiorów domkniętych istnieją bazy ich otoczeń o mocy nie przekraczającej liczby Suslina*. Stąd też, *jeśli przestrzeń (klasy T_2) jest obrazem ciągłym przestrzeni uporządkowanej zwartej*, to jej wagi w punktach nie przekraczają jej liczby Suslina.

Liczba Suslina przestrzeni diadycznej jest $\leqslant \aleph_0$ (ponieważ na mocy twierdzenia Marczewskiego[184] liczba Suslina discontinuów Cantora jest równa $\aleph_0$. Stąd na mocy twierdzenia Jesienina—Wolpina[185] waga całości przestrzeni jest $\leqslant \aleph_0$, a to oznacza metryzowalność przestrzeni.

*

Do najbardziej spektakularnych twierdzeń z omawianego zakresu należą twierdzenia ilustrujące trudności związane z odwzorowaniami kontinuów uporządkowanych na produkt dwu kontinuów uporządkowanych.

Twierdzenie. (Mardešić, 1960)[186]. *Produkt kontinuum uporządkowanego przez odcinek liczb rzeczywistych, będący obrazem ciągłym kontinuum uporządkowanego, ma własność Suslina.*

Dowód. Niech $f: C \xrightarrow{\text{na}} X \times I$ będzie odwzorowaniem ciągłym, gdzie C i X są kontinuami uporządkowanymi, a I — odcinkiem liczb rzeczywistych. W każdym zbiorze $U \times I$, gdzie U jest otwarte w X, mamy wartości otwartości odwzorowywania f. Stąd istnienie przedziału J w C takiego, że int $f(J)$ jest niepuste. Rzut $p_I(f(J))$ zbioru $f(J)$ na I zawiera wtedy przedział odcinka I.

Przypuśćmy, *a contrario*, że X nie ma własności Suslina. Istnieje rodzina S nieprzeliczalna przedziałów U kontinuum X wzajemnie rozłącznych. Przedziały J odpowiadające (w opisany wyżej sposób) przedziałowi U są również wzajemnie rozłączne. Ustalmy bazę przeliczalną $\mathcal{B}$ na I. Wobec nieprzeliczalności rodziny odcinków J istnieje element V bazy $\mathcal{B}$ taki, że $p_I(f(J)) \supset V$ dla nieskończenie wielu J. Z ciągowej zwartości kontinuum C wnioskujemy o istnieniu ciągu zbieżnego punktów $c_n \in C$ i ciągu J_n odcinków J (rozłącznych), takich, że $c_n \in J$ i $p_I(f(J)) \supset V$. Łatwo stwierdzamy, że c — lim c_n jest punktem nieciągłości dla $p_I \circ f$; oscylacja w c jest dla odwzorowania $p_I \circ f$ co najmniej taka, jak średnica zbioru V.

[183] S. Mardešić, P. Papić: *Diadiczeskije bikompakty i nieprerywnyje otobrażenija uporiadoczennych bikompaktów*. Dokłady AN SSSR **143** (1962), s. 529—531.

[184] E. Szpilrajn (Marczewski): *Remarque sur les produits cartésiens d'espaces topologiques*. Dokłady AN SSSR 31 (1941), s. 525—527. Twierdzenie Marczewskiego orzeka, że discontinua Cantora D^m — niezależnie od wagi —mają własność Suslina.

[185] A.S. Jesienin-Wolpin: *O zawisimostni mieżdu lokalnym i intiegralnym wiesom w diadiczeskich bikompaktach*. Dokłady AN SSSR 68 (1949), s. 441—444. Twierdzenie Jesienina—Wolpina orzeka, że waga przestrzeni diadycznej jest równa kresowi górnemu wag w punktach. Dowód por.: B. Jefimow: *Diadiczeskije bikompakty*. Trudy Mosk. Mat. Obszczestwa 14 (1965), s. 211—247, s. 233.

[186] S. Mardešić: *Mapping ordered continua onto product spaces*. Glasnik Mat.-Fiz i Astronom. 15 (1960), s. 85—89.

Wniosek. *Jeśli produkt $X \times Y$ kontinuów uporządkowanych jest obrazem ciągłym kontinuum uporządkowanego, to kontinua X i Y mają własność Suslina.*

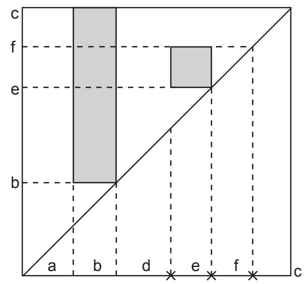
Dowód. Niech $f : C \to X \times Y$ będzie odwzorowaniem odpowiadającym założeniom. Odwzorowanie $C \xrightarrow{f} X \times Y \xrightarrow{1x \times g} X \times I$, gdzie $g : Y \to I$ jest odwzorowaniem spełniającym założenia dowiedzionego twierdzenia. Stąd na mocy tego twierdzenia X ma własność Suslina.

Aby wyciągnąć dalsze wnioski, przypomnijmy następujące twierdzenie.

Twierdzenie Kurepy (1950)[187]. *Kwadrat przestrzeni uporządkowanej nieośrodkowej nie ma własności Suslina.*

Dowód. Niech X będzie przestrzenią uporządkowaną nieośrodkową. Weźmy pod uwagę rodziny trójek uporządkowanych zbioru X takie, że:

(*) jeśli mamy dwie trójki $a < b < c$ i $d < e < f$ należące do tej samej rodziny, to elementy jednej leżą w jednym i tym samym przedziale wyznaczonym przez punkty drugiej (może to być przedział zewnętrzny).



Rys. 59. Twierdzenie Kurepy

Dla trójek spełniających warunek (*) prostokąty $(a,b) \times (b, c)$ i $(d, e) \times (e, f)$ są rozłączne (rys. 59).

Niech $\mathcal{B}$ będzie łańcuchem złożonym z rodzin trójek o własności (*), uporządkowanym częściowo przez inkluzję.

Jeśli dwie trójki należą do $\cup\, \mathcal{L}$, to należą do jednej rodziny o własności (*). Stąd $\cup\, \mathcal{L}$ ma nadal własność (*). Na mocy lematu Kratowskiego—Zorna istnieje rodzina maksymalna trójek mająca własność (*).

Niech $\mathcal{R}$ będzie tego rodzaju rodziną. Zbiór punktów trójek należących do $\mathcal{R}$ jest nieprzeliczalny, bo jeśliby był przeliczalny, to wobec nieośrodkowości X istniałby istniałby przedział wolny od punktów tych trójek i można by weń wstawić jeszcze jedną trójkę, powiększając $\mathcal{R}$.

Rodzina $\mathcal{R}$ jest więc nieprzeliczalna. Nieprzeliczalna jest też rodzina prostokątów wzajemnie rozłącznych odpowiadających trójkom tej rodziny.

Dowiedliśmy w ten sposób, że $X \times X$ nie ma własności Suslina.

Wniosek. *Jeśli istnieje odwzorowanie ciągłe odcinka na swój kwadrat, to odcinek ten jest ośrodkowy, a więc jest odcinkiem liczb. rzeczywistych.*

Dowód. Przypuśćmy, że istnieje odwzorowanie ciągłe odcinka uogólnionego X na swój kwadrat X × X. Na mocy twierdzeń Mardešicia, X ma własność Suslina, skąd $X \times X$ ma własność Suslina. Wobec twierdzenia Kurepy w przypadku nieośrodkowości X dostajemy sprzeczność.

[187] G. Kurepa: *La condition de Suslin et une propriété caractéristique des nombres réels*. CR Acad. Paris 231 (1950), s. 1113—1114; *The Cartesian multiplication and the celularity*. Publ. Inst. Math. Balgrad 2 (1962), s. 121—132. Podany tu dowód autor zna z pracy P. Simona: *A note on cardinal invariant of square*. Comm. Math. Univ. Carolinae 14 (1973), s. 205—213.

Widzimy, że dla odcinków uogólnionych niemetrycznych nie ma odpowiednika odwzorowań peanowskich: ta osobliwość pojawia się jedynie w przypadku odcinka rzeczywistego.

Oczywiście kontinuum metryczne lokalnie spójne zawsze ma odwzorowanie ciągłe na swój kwadrat. Są wszakże kontinua metryczne — z niedużym odstępstwem od lokalnej spójności — nie mające odwzorowań na swój kwadrat[188].

*

Twierdzenie Mardešicia zostało później pochłonięte przez następujące twierdzenie.

Twierdzenie Treybiga (1964)[189]. *Jeśli produkt dwu przestrzeni T_2 jest obrazem ciągłym przestrzeni uporządkowanej zwartej, to obie przestrzenie są metryzowalne.*

Redukcja dowodu. Niech $f : K \to X \times Y$ będzie odwzorowaniem ciągłym przestrzeni zwartej uporządkowanej na produkt dwu przestrzeni T_2 (nieskończonych). Przestrzeń Y jest wtedy obrazem przestrzeni K przez odwzorowanie $K \xrightarrow{f} X \times Y \xrightarrow{pY} Y$. Przestrzeń Y (nieskończona) jest ciągowo zwarta[190], zawiera więc zbiór postaci $\{y\} \cup \{y_1, y_2,...\}$, gdzie $y = \lim y_n$ i wszystkie punkty y_n są różne od siebie i różne od y. Podprzestrzeń $X (\{y\} \cup \{y_1, y_2,...\})$ jest również obrazem ciągłym przestrzeni uporządkowanej, mianowicie swojego przeciwobrazu przez odwzorowanie $f \circ p_Y$.

Dowód twierdzenia Treybiga sprowadza się zatem do dowodu następującego prostszego twierdzenia.

Twierdzenie. *Jeśli $f : K \to X \times N$ jest odwzorowaniem ciągłym przestrzeni uporządkowanej zwartej na produkt $X \times N$, gdzie X jest przestrzenią T_2, a N przestrzenią* $\{0\} \cup \{1, 1/2, 1/3,...\}$ (ciąg zbieżny na prostej wraz z granicą), *to przestrzeń X jest metryzowalna.*

Dowód (Dębski)[191]. Zbiory $f^{-1} (X \times \{1/n\})$ są domknięto-otwarte w K. Każdy z nich jest sumą skończonej ilości swoich składowych wypukłych w K; składowe

[188] R. Engelking, A Lelek: *Cartesian products and continuous images*. Coll. Math. 8 (1961), s. 27—29; w pracy podany jest pewien warunek wystarczający do możliwości odwzorowania kontinuum metrycznego na swój kwadrat. H. Katsuura: *The nonexistence of a continuous surjection from a continuum onto ist square*. Proc. Amer. Math. Soc. 111 (1991), s. 1129—1140; postawiony jest problem: czy kontinuum nierozkładalne (metryczne) ma zawsze odwzorowanie na swój kwadrat? Uwagi na temat odwzorowań przestrzeni na swój kwadrat zawiera również artykuł A. Lelka: *O funkcjach Peany*. Prace Mat. **7** (1962), s. 107—140.

[189] L.B. Treybig: *Concerning continuous images of compact ordered spaces*. Proc. Amer. Math. Soc. 15 (1964), s. 866—871.

[190] Twierdzenie o ciągowej zwartości przestrzeni uporządkowań zwartych (s. 20) nietrudno przenosi się na ich obrazy ciągłe.

[191] W. Dębski — dowód przekazany autorowi w rozmowie. Uogólnienie: W. Dębski, W. Kulpa: *A short proof that a compact ordered space cannot be mapped onto a nonmetric proeduct*. Proc. Amer. Math. Soc. 82 (1981), s. 312—313.

te są zbiorami domknięto-otwartymi, a więc zwartymi. Niech $\mathcal{Q}_n$ będzie rodziną (skończoną) obrazów, $p_X(f(B))$, składowych B zbioru f^{-1} $(X \times \{1/n\})$. Rodzina $\mathcal{Q}_n$ jest pokryciem skończonym przestrzeni X zbiorami domkniętymi.

Pokażemy, że jeśli x i x' są różnymi od siebie punktami zbioru X, to istnieje n, oraz zbiór $p_X(f(B))$ należący do $\mathcal{Q}_n$ taki, że jeden z punktów należy do tego zbioru, a drugi nie.

Istotnie, przypuśćmy, że dla każdego n punkty x i x' należą do pewnego jednego zbioru $p_X(f(B_n))$ należącego do $\mathcal{Q}_n$. Z każdego ze zbiorów B_n weźmy po jednym punkcie b_n. Ponieważ przestrzeń K jest ciągowo zwarta, więc z ciągu $\{b_1, b_2,...\}$ można wybrać podciąg zbieżny. Niech b będzie granicą tego podciągu; dla uproszczenia, niech sam ciąg $\{b_1, b_2,...\}$ spełnia warunki dla wspomnianego podciągu. Ponieważ zbiory B_n są różnymi od siebie składowymi wypukłymi zbioru zwartego w K, więc dla każdego ciągu $\{b_1, b_2,...\}$, gdzie $b'_n \in B_n$, jest $\lim b'_n = b$. W szczególności jest tak dla punktów c_n ze zbiorów B_n takich, że $p_X(f(c_n)) = x$. Wynika stąd, że $x = p_X(f(b))$. Podobnie dostaniemy $x' = p_X(f(b))$. Jest więc $x = x'$; sprzeczność.

Z dowiedzionej przesłanki wynika, że jeśli $x \in X$, to $\{x\} = \cap \{gw(x, \mathcal{Q}_n) : n = 1, 2,...\}$, gdzie $gw(p, \mathcal{P})$ oznacza *gwiazdę* punktu p względem rodziny zbiorów $\mathcal{P}$, tj. sumę tych elementów rodziny $\mathcal{P}$, do których należy punkt x. Wobec tego, że $\mathcal{Q}_n$ jest skończone i składa się ze zbiorów domkniętych, zbiory $gw(x, \mathcal{Q}_n)$ są domknięte. Niech U będzie otoczeniem otwartym punktu x. Wobec zawartości X istnieje n_* takie, że $\cap \{gw(x, \mathcal{Q}_n) : n \leqslant n_*\} \subset U$. Wynika stąd, że $x \in X — \cup \{A : A \in \mathcal{Q}_n, n \leqslant n_* \text{ i } x \notin A\} \subset U$.

Widzimy więc, że dopełnienia sum skończonych zbiorów należących do rodziny $\mathcal{Q}_1 \cup \mathcal{Q}_2 \cup ...$ tworzą bazę zbiorów otwartych w X; jest to baza przeliczalna.

Dowiedzione twierdzenie było wcześniej znane w szczególnym przypadku odwzorowań odcinków uogólnionych (cytowana wcześniej praca Mardešicia i Papicia, 1960). Już z tej prostszej wersji wynika, że *produkt odcinka rzeczywistego przez jakikolwiek odcinek uogólniony niemetryczny*, np. przez długi odcinek[192], *nie jest obrazem ciągłym żadnego odcinka uogólnionego*. Produkty te są kontinuami lokalnie łukowo spójnymi klasy T_2 i to o bardzo prostej budownie, co przekonuje jeszcze w inny sposób o niemożliwości przeniesienia twierdzenia Hahna—Mazurkiewicza na zakres kontinuów niemetrycznych.

Innym szczególnym przypadkiem jest dowiedzione wcześniej twierdzenie Mardešicia orzekające, że *jedynymi odcinkami uogólnionymi mającymi odwzorowania ciągłe na swój kwadrat są odcinki prostej rzeczywistej.*

Otwartymi dotąd zagadnieniami są charakteryzacje topologiczne (wewnętrzne) obrazów ciągłych odcinków uogólnionych (jeśli te obrazy są klasy T_2) oraz obrazów ciągłych przestrzeni topologicznych zwartych, jeśli są one kontinuami T_2 lokalnie spójnymi[193]. Jak pokazał Treybig i niezależnie J. Nikiel[194], te dwa zakresy obrazów ciągłych pokrywają się.

---

[192] G.S. Young: *Representations of Banach spaces*. Proc. Amer. Math. Soc. 13 (1962), s. 667—668 (dowód, że $[0, 1] \times [0, \omega_1\}$ nie jest obrazem ciągłym przestrzeni zwartej uporządkowanej).

[193] S. Mardešić: *On the Hahn—Mazurkiewicz problem in non-metric spaces*. Proceedings of the Second Prague Symposium 1966, Praga 1967, s 248—255.

[194] L.B. Treybig: *A characterization of spaces that are the continuous image of an arc*. Topology and its Appl. 24 (1986); J. Nikiel: *Images of arcs — a nonseparable varsion of the Hahn_Ma-*

Nie wystarczy dołączyć — do założenia lokalnej spójności — założenia łukowej spójności, aby kontinuum T_2 było obrazem ciągłym kontinuum uporządkowanego. Przykładem jest — wobec twierdzenia Treybiga — produkt dwu kontinuów uporządkowanych, z których jedno nie jest metryczne. Jednakże — jak dowiódł J. Nikiel[195] — kontinua T_2 dziedzicznie lokalnie spójne są obrazami ciągłymi kontinuów uporządkowanych.

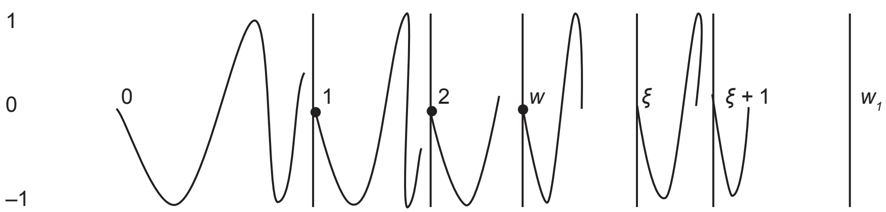
*

W zakresie niemetrycznym lokalna spójność nie pociąga łukowej spójności. Pierwszy przykład pokazujący niemożliwość przeniesienia twierdzenia Mazurkiewicza—Moore'a na kontinua niemetryczne pochodził od Mardešicia (1960), który później, w 1967 roku, korzystając z hipotezy continuum, podał przykład bardziej skrajny, a mianowicie kontinuum lokalnie spójnego T_2 nie zawierającego łuków[196].

Możliwie prosty przykład podali Cornette i Lehman[197]. Jest to kontinuum lokalnie spójne klasy T_2 budowane jako przeciwobraz odcinka $[0, \omega_1]$.

Konstrukcja (Cornette—Lehman). Niech J będzie *długim odcinkiem*, tj. zbiorem liczb porządkowych $\zeta < \omega_1$, którego skoki są zapełnione odcinkami liczb rzeczywistych, z dodanym na końcu punktem ω_1, z topologią wyznaczoną przez uporządkowanie. Zilustrujmy długi odcinek liniowo jako oś odciętych (por. rys. 60).

W produkcie $J \times [-1, 1]$ weźmy pod uwagę podzbiór X złożony z odcinków $\xi \times [-1, 1]$, $0 \leqslant \xi \leqslant \omega_1$ oraz z zagęszczających się do odcinków $\{\xi + 1\} \times [-1,1]$ sinusoid $y = \sin (\pi/(1 - t)$ nad każdym z półodcinków $0 \leqslant t < 1$ łączącym w J punkty ξ i $\xi + 1$.



Rys. 60. Kontinuum X nie jest lokalnie spójne w punktach odcinków $\{\xi+ 1\} \times [-1,1]$

zurkiewicz theorem. Fund. Math. 129 (1987), s. 91—120. Charakteryzację wewnętrzną obrazów ciągłych przestrzeni zwartych uporządkowanych podała ostatnio M.E. Rudin (2000), preprint.

[195] J. Nikiel: *The Hahn-Mazurkiewicz theorem for hereditarily locally connected continua*, Wrocław 1988, preprint.

[196] S. Mardešić: *On the Hahn—Mazurkiewicz theorem in metric spaces*. Proc. Amner. Math. Soc. **11** (1960), s. 921—937; S. Mardešić: *A locally connected continuum whiuch contains no proper klocally connected subcontinuum*. Glasnik Mat. **2** (1967), s. 167—178.

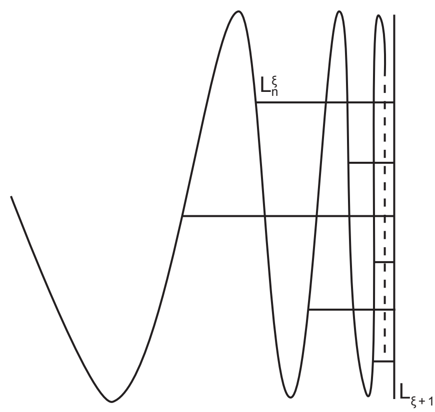
[197] J.L. Cornette, B. Lehman: *Anothre locally connected not connected by ordered continua*. Proc. Amer. Math. Soc. **35** (1972), s. 281—284. Niedawno S.A. Drozdowski podał przykład kontinuum T_2 lokalnie spójnego, nie łukowo spójnego, które ma bazę zbiorów otwartych o brzegach przeliczalnych. S.A. Drozdowski: *Primier perifericzeski sczetnogo lokalno swiaznogo kontinuuma, nie jawlajuszczegosia liniejno swiaznym*. Mat. Zamietki **65** (1999), s. 659—666. Kontinua mające bazy zbiorów otwartych o brzegach skończonych są dziedzicznie lokalnie spójne i są wobec wspomnianego na s. 115 twierdzenia Nikla, obrazami ciągłymi kontinuów uporządkowanych.

Zbiór X z topologią dziedziczoną z produktu $J \times [-1,1]$ jest kontinuum. Utwórzmy produkt $X \times [0,1]$. Linie sinusoidalne stają się teraz wstęgami sinusoidalnymi zagęszczającymi się do prostokątów $P_{\xi+1} = \{\xi - 1\} \times [0,1] \times [-1,1]$. Kontinuum $X \times [0,1]$ nie jest lokalnie spójne w punktach prostokątów $P_{\zeta+1}$.

W prostokątach $P_{\xi+1} = \{\xi - 1\} \times [0,1] \times [-1,1]$ weźmy pod uwagę podzbiory przeliczalne $D_\zeta = \{d_1, d_2, ...\}$ gęste, mające rzuty na prostokąt $[-1,1] \times [0,1]$, rozłączne i takie, że w D_ζ nie ma dwu punktów o tej samej współrzędnej z osi [0, 1] (dowód istnienia rodziny zbiorów D_ζ przebiega bez przeszkód przez indukcję pozaskończoną zbiorze liczb $\xi < \omega_1$).

Z każdego punktu d_n^ξ zbioru D_ζ wystawmy odcinek L_n^ξ równoległy do osi J, którego rzut na oś J jest pododcinkiem $[1 - 1/n, 1]$ odcinka od ξ do $\xi + 1$. Po dołączeniu tych odcinków do $X \times [0, 1]$ dostajemy kontinuum Y, które jest już lokalnie spójne w punktach prostokątów $P_{\xi+1}$, $\xi < \omega_1$. Dowód ilustruje rys. 61 ukazujący rzut na $J \times [-1, 1]$.

W punktach prostokątów P_ξ, gdzie ξ jest graniczne, kontinuum Y nie jest lokalnie spójne. Budujemy nowe kontinuum Z, które powstaje z Y przez utożsamienie w każdym prostokącie P_ξ, gdzie ξ jest graniczne, punktów mających tę samą współrzędną na osi [0, 1]. Po tych utożsamieniach prostokąty P_ζ przechodzą w odcinki w naturalny sposób homeomorficzne z odcinkiem [0, 1].



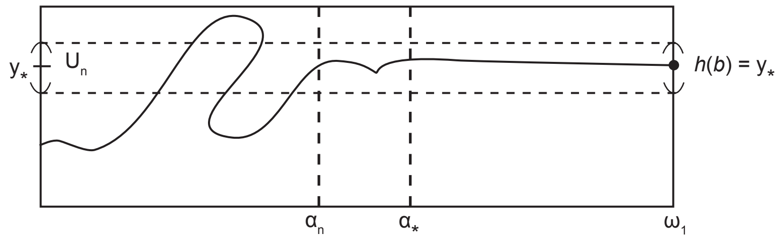
Rys. 61. Kontinuum Cornette'a—Lehman

Kontinuum Z (które jest T_2, bo rozbicie przestrzeni Y prowadzące do wspomnianego utożsamienia jest półciągłe górnie) jest lokalnie spójne we wszystkich punktach. Pokażemy, że punkt mający J-tą współrzędną równą ω_1 nie ma w Z połączenia łukiem uogólnionym z punktem J-tej współrzędnej równej 0.

W potrzebnym dla tego dowodu lemacie J nadal oznacza długi odcinek $[0, \omega_1]$, a I odcinek liczb rzeczywistych.

Lemat. *Jeśli $h : C \to J \times I$ jest odwzorowaniem ciągłym z kontinuum uporządkowanego $C = [a, b]$ takiego, że $h(a) \in \{0\} \times I$, $h(b) \in \{\omega_1\} \times I$, a punkt b jest jedynym punktem, w którym h przyjmuje wartość na zbiorze $\{\omega_1\} \times I$, to isntieje α_*, $\alpha_* < \omega_1$, takie, że na odcinku $(\alpha_*, \omega_1]$ zbiór wartości odwzorowań h leży na odcinku $y = y_* = p_I(h(b))$; znaczy to, że odwzorowanie $p_I \circ h : C \to [0, 1]$ przyjmuje wartość stałą $p_I(h(b))$ na pewnym przedziale wokół b.*

Dowód. Niech $U_1 \supset U_2 \supset ...$ będzie bazą w punkcie $y_* = p_I(h(b))$.



Rys. 62. Odwzorowania $p_I \circ h$

Wobec ciągłości istnieje otoczenie V_n wokół punktu b takie, że $p_I(h(V_n)) \subset U_n$, z czego wynika, że dla każdego n istnieje α_n, $\alpha_n < \omega_1$, takie, że $h(V_n) \subset (\alpha_n, \omega_1] \times U_n$. Niech $\alpha_* = \sup \alpha_*$. Oczywiście, $\alpha_* < \omega_1$. Na przeciwobrazie h^{-1} $([\alpha_*, \omega_1] \times I)$ odwzorowanie jest stałe, równe y_*. Nad odcinkiem $(\alpha_*, \omega_1]$ zbiór wartości leży na prostej $y = y_*$.

Wracamy do kontinuum Z. Niech C będzie łukiem uogólnionym $[a, b]$, a $g : C \to Z$ drogą łączącą w Z punkty $g(a)$ o J-tej współrzędnej 0 z punktem $g(b)$ o J-tej współrzędnej ω_1. Założymy, że poza b nie ma na C punktu o J-tej współrzędnej ω_1. Na mocy lematu odwzorowanie $p \circ g : C \to [0, 1]$ jest stałe na pewnym końcowym odcinku V odcinka $C = [a, b]$.

Znaczy to, że wartości odwzorowania $g : C \to Z$ leżą nad pewnym odcinkiem $(\alpha_*, \omega_1]$ w płaszczyźnie $y = y_* = p_I(g(b))$. Wobec doboru punktów, z których wystawione były odcinki czyniące kontinuum Z lokalnie spójnym na płaszczyźnie $y = y_*$ nie ma tego rodzaju odcinków. Odwzorowanie $g| V : V \to Z$ jest więc odwzorowaniem odcinka uogólnionego na odcinek liczb rzeczywistych $[-1, 1]$, nie mającym przedziałów stałości.

Tego rodzaju odwzorowań nie ma z uwagi na następujące, mające własne znaczenie, twierdzenie.

Twierdzenie (Pearsona 1976)[198]. *Odcinek uogólniony mający odwzorowanie ciągłe bez przedziałów stałości w odcinek liczb rzeczywistych jest odcinkiem liczb rzeczywistych.*

Dowód. Niech $f : [a,b] \to [0, 1]$ będzie odwzorowaniem odcinka (uogólnionego) $[a, b]$ w odcinek liczb rzeczywistych takim, że f^{-1} (t) jest całkowicie niespójne dla każdego t. Pokażemy, że $[a, b]$ zawiera zbiór przeliczalny gęsty, co wystarczy, wobec twierdzenia Cantora (*Wykład I*), do uzyskania tezy.

Niech $\mathcal{B}$ będzie bazą zbiorów otwartych na [0, 1]. Dla każdej pary $P = \{U, U'\}$ zbiorów z bazy $\mathcal{B}$ takich, że $\overline{U'} \subset U$, i ich przeciwobrazów f^{-1} $(\overline{U'})$ i f^{-1} (U), rozważmy przedziały otwarte $V_1^P, \ldots, V_{k(P)}^P$ na $[a, b]$ takie, że f^{-1} $(\overline{U'}) \subset V_1^P \cup V_{k(P)}^P \cup f^{-1}$ (U). Końce przedziałów $V_1^P, \ldots, V_{k(P)}^P$, biorąc pod uwagę wszystkie pary P, tworzą zbiór (przeliczalny) gęsty w $[a, b]$, co jest oczywiste, jeśli wziąć pod uwagę to, że przeciwobrazy punktów mają wnętrza puste.

---

[198] B.J. Pearson: *A metrization theorem for ordered continua*. Glasnik Mat. **11** (1976), s. 131—133.

Wykład VIII. Dendryty

Dziedziczna lokalna spójność i dziedziczna jednosprzęgłowość dendrytów * Punty rozgałęzienia * Podbaza złożona z odgałęzień * Metryzowalność dendryttów równoważna ich ośrodkowości * Końce * Retrakcje monotoniczne * Twierdzenie o punkcie stałym

Kontinuum X jest nazywane *dendrytem*, jeśli dla każdych dwu jego punktów a i b istnieje w nim punkt c, który rozspaja między a i b, tzn. istnieje taki punkt c, że $X - \{c\} = U \cup V$, gdzie U i V są otwarte, rozłączne i takie, że $a \in U$ i $b \in V$.

Tradycyjnie nazwą dendrytów obejmuje się jedynie dendryty metryczne, dla dendrytów niemetrycznych przeznaczając inne nazwy, np. *drzewa*.

Podane tu określenie dendrytów[199], chociaż proste, nie uwidacznia ich budowy.

Okaże się, że dendryty są lokalnie spójne, a dokładniej, że są tym samym co kontinua T_2 dziedzicznie lokalnie spójne, w których każde dwa punkty dają się połączyć dokładnie jednym łukiem mającym końce we wspomnianych punktach, co odpowiada własności tradycyjnie służącej za określenie dendrytów metrycznych (Menger, 1932) jako kontinuów (metrycznych) lokalnie spójnych, nie zawierających krzywych zwykłych zamkniętych[200].

Wśród własności określających dendryt nie wymienia się żadnej własności oddzielania, ale warunek T_2 — co łatwo zauważyć — zawarty jest w określeniu dendrytu.

To, że *łuki są dendrytami*, jest oczywiste.

Dendryty mają wiele własności formalnych wspólnych z łukami i są obrazami ciągłymi łuków przez szczególnego rodzaju odwzorowania. Teoria dendrytów jest zamkniętym podrozdziałem teorii kontinuów. Na dendryty przechodzi wiele twierdzeń z teorii kontinuów uporządkowanych[201], mimo że, wyłączając łuki, nie są one porządkowalne.

---

[199] G.T. Whyburn: *Analytic topology*, s. 88; L.E. Ward: *A note on dendrites and trees*, Proc. Amer. Math. Soc. 5 (1954), 992—994. Książka Whyburna jest najbardziej kompletnym źródłem twierdzeń o dendrytach.

[200] K. Menger: *Kurventheorie* (rozdz. 10 *Die Baumkurven*). Berlin—Leipzig 1932. Spośród wielu prac wcześniejszych wymienimy cytowaną już pracę K. Zarankiewicza (1927).

[201] Na temat problemów związanych z krotnością odwzorowań ciągłych podwyższających wymiar dendrytu (temat z rozdziału o odwzorowaniach peanowskich) por. W. Dębski i J. Mioduszewski: *Conditions which ensure that a simple map does not raise dimension*. Coll. Math. 63 (1992), s. 173—185.

Typowym przykładem dendrytu jest *troid* — kontinuum będące sumą trzech łuków (nie redukujących się do punktów) mających dokładnie jeden punkt wspólny będący ich końcami (rys. 28). Okrąg i kontinua zawierające okrąg nie są dendrytami.

Ogólne własności

Własność określająca dendryty przenosi się na podzbiory spójne dendrytów, w szczególności na podkontinua. Zatem:

1. *Podkontinua dendrytów są dendrytami.*

Przypomnijmy, że jeżeli kontinuum (klasy T_2) nie jest lokalnie spójne, to, jak wiemy z końca *Wykładu VI*, znajdują się na nim dwa punkty, takie że żaden punkt nie rozspaja kontinuum między nimi. Wnosimy stąd, że

2. *Dendryty są lokalnie spójne,*

skąd, wobec 1, wnosimy, że

3. *Dendryty są dziedziczone lokalnie spójne,*

a stąd dalej, że każde kontinuum nieprzywiedlne w dendrycie jest łukiem. Wobec twierdzenia o istnieniu kontinuów nieprzywiedlnych, wnosimy, że

4. *Dendryty są łukowo spójne — a wobec 1 — dziedzicznie łukowo spójne.*

Prawdą jest więcej, a mianowicie, że

5. *Każde dwa punkty dendrytu leżą na dokładnie jednym łuku mającym końce w tych punktach.*

Dowód. Przypuśćmy, że w dendrycie są dwa różne od siebie łuki, których końcami są punkty a i b. Istnieją wtedy punkty p i q należące do obu łuków takie, że odcinki tych łuków między punktami p i q nie mają już, oprócz p i q, punktów wspólnych. Wtedy żaden punkt dendrytu nie mógłby rozspajać między p i q; sprzeczność.

Jedyny łuk łączący w danej przestrzeni punkty a i b, mający końce w tych punktach, oznaczamy przez $[a, b]$.

6. *Każdy punkt łuku* $[a, b]$ *zawartego w dendrycie X, różny od a i b, rozspaja X między a i b.*

Dowód. Niech $c \in [a, b] - \{a, b\}$. Jeśliby punkty a i b należały do tej samej składowej zbioru $X - \{c\}$, to istniałby łuk łączący je w $X - \{c\}$ (twierdzenie Mazurkiewicza—Moore'a). Ponieważ ten łuk omija punkt c, więc jest różny od łuku $[a, b]$; sprzeczność z twierdzeniem 5.

Dowiedliśmy w ten sposób, że *dendryty są kontinuami klasy T_2, dziedzicznie lokalnie spójnymi, w których każde dwa punkty połączone są dokładnie jednym łukiem.*

Twierdzenie to daje się odwrócić.

Twierdzenie 1[202]. *Jeśli kontinuum (klasy)* T_2 *jest* (1) *dziedzicznie lokalnie spójne i* (2) *każde dwa punkty są w nim końcami co najwyżej jednego łuku, to kontinuum to jest dendrytem; dokładniej: jeśli a i b są punktami tego kontinuum, to każdy punkt łuku* [*a, b*] *rozspaja kontinuum między a i b.*

Dowód. Niech X będzie kontinuum klasy T_2 o własnościach (1) i (2). Niech c będzie punktem łuku $[a, b]$ różnym od a i b (istnienie łuku wynika z dziedzicznej lokalnej spójności). Jeśliby zbiór $X - \{c\}$ był spójny, to wobec twierdzenia Wildera (*Wykład VI*, s. 84) istniałoby kontinuum łączące w $X - \{c\}$ punkty a i b. Wobec dziedzicznej lokalnej spójności (1), w $X - \{c\}$ istniałby łuk łączący a i b (tym łukiem byłoby kontinuum nieprzywiedlne zawarte w już istniejącym) i byłby to łuk inny niż $[a, b]$. Przeczyłoby to własności (2).

Dowiedzione twierdzenie wraz z przedtem dowiedzionymi stwierdzeniami 1—5 orzeka, że własności (1) i (2) charakteryzują dendryty w zakresie kontinuów T_2.

W zakresie kontinuów metrycznych założenie (1) z twierdzenia można osłabić do lokalnej spójności, ale wtedy w dowodzie zamiast z lematu Wildera trzeba skorzystać z dalej idącego twierdzenia Mazurkiewicza—Moore'a. W ogólnym zakresie kontinuów T_2 założenie lokalnej spójności nie wystarczy.[203]

Biorąc pod uwagę to, że w kontinuach metrycznych z istnienia więcej niż jednego łuku łączącego dwa punkty wynika istnienie krzywej zwykłej zamkniętej, dostajemy następujący wniosek.

Wniosek. *Jeśli kontinuum metryczne lokalnie spójne nie zawiera krzywej zwykłej zamkniętej, to jest dendrytem.*

Podzbiory dendrytów

7. *Podzbiory spójne dendrytu są łukowo spójne.*

Dowód. Jeśli A jest podzbiorem spójnym dendrytu X, punkty a i b zaś należą do A, to łuk $[a, b]$ jest zawarty w A, bo inaczej punkt c tego łuku nie należący do A, rozspajając całe X między a i b, rozspajałby zbiór A (między tymi punktami), co wobec $c \notin A$, jest niemożliwe.

8. *Przekrój dwu podzbiorów spójnych dendrytu jest spójny.*

Dowód. Jeśli a i b są punktami takiego przekroju, to łuk $[a, b]$ je łączący jest zawarty w jednym i w drugim zbiorze (co wynika ze stwierdzenia 6), a więc jest zawarty w tym przekroju. Dowodzi to spójności przekroju.

---

[202] Twierdzenie pochodzi z pracy K. Mengera: *Über reguläre Baumkurven*. Math. Ann. 96 (1927), s. 576—582. Por. również *Kurventheorie* tegoż autora.

[203] Na temat dendrytów w zakresie niemetrycznym patrz artykuł przeglądowy L.E. Warda: *Recent development in dendritic spaces and related topics*. Studies in Topology, 1975, s. 601—607; por. również G.R. Gordh, Jr., L. Lum: *Monotone retracts and some characterization of dendrites*. Proc. Amer. Math. Soc. 59 (1976), s. 156—158.

Kontinuum, w którym przekrój dowolnych dwu podkontinuów dających w sumie całość jest spójny, nazywane jest *jednosprzęgłym*.

Twierdzenie 8 orzeka (z naddatkiem), że *dendryty są jednosprzęgłe*.

Okrąg nie jest jednosprzęgły. Jednosprzęgłość nie jest własnością wyłącznie dendrytów: kwadrat płaski jest jednosprzęgły (co nie jest oczywiste: por. rozdz. 10 *Topologie II* K. Kuratowskiego), ale jest jednosprzęgłą sinusoidą zagęszczającą się do odcinka.

Z twierdzenia 7, wobec 1, wynika jednosprzęgłość każdego podkontinuum dendrytu, tj. *dziedziczna jednosprzęgłość*. Kwadrat płaski nie jest dziedzicznie jednosprzęgły, ale sinusoida zagęszczona jest dziedzicznie jednosprzęgła.

Dowiedzione dotąd twierdzenia składają się na wniosek, według którego *kontinuum klasy* T_2 *dziedzicznie lokalnie spójne i dziedzicznie jednosprzęgłe jest dendrytem.* Ale prawdą jest więcej.

Twierdzenie. *Kontinuum klasy* T_2 *lokalnie spójne i dziedzicznie jednosprzęgłe jest dendrytem.*

Dowód. Niech X będzie kontinuum klasy T_2 lokalnie spójnym i dziedzicznie jednosprzęgłym. Niech a i b będą punktami kontinuum X. Niech C będzie kontinuum nieprzywiedlnym między a i b zawartym w X. Niech c będzie punktem kontinuum C różnym od a i b. Punkt c rozspaja X między a i b.

Jeśliby tak nie było, to a i b należałoby do tej samej składowej zbioru $X \{c\}$, która (wobec lokalnej spójności X) jest obszarem. Na mocy twierdzenia Wildera (*Wykład VI*, s. 84) istnieje kontinuum K łączące poza punktem c również punkty a i b. Wobec dziedzicznej jednosprzęgłości przekrój $C \cap K$ jest kontinuum. Jest to kontinuum zawarte w C i różne od C (bo $c \notin C \cap K$); sprzeczność z nieprzywiedlnością C.

Wynikanie odwrotne było dowiedzione wcześniej. Dostaje się w ten sposób charakteryzację dendrytów jako kontinuów T_2 lokalnie spójnych i dziedzicznie jednosprzęgłych[204].

Na temat przestrzeni spójnych — bez zakładania ich zwartości — o tej własności, jaką mają na mocy określenia dendryty; por. książki H. Koka i A.E. Brouwera, artykuł przeglądowy L.E. Warda oraz prace W.W Proizwołowa (1969, 1970)[205].

Nietrudne są dowody następujących dwóch twierdzeń:

9. *Jeśli w kontinuum dziedzicznie jednosprzęgłym obszary są semikonttinuami* (każde dwa punkty można połączyć za pomocą kontinuum), to *przekrój każdych dwu obszarów jest obszarem.*

10. *Jeśli w kontinuum lokalnie spójnym* T_2 *przekrój dwu obszarów jest obszarem, to kontinuum jest dziedzicznie jednosprzęgłe.*

---

[204] L.E. Ward: *Mobs, trees, and fixed points*. Proc. Amer. Math. Soc. 8 (1957), s. 798—804.

[205] H. Kok: *Connected orderable spaces*. Mathematical Centre Tracts 49, Amsterdam 1974; A.E. Brouwer: *Treelike spaces and related connected topoligical spaces*. Mathematisch Centrum Amsterdam 1967.

Z twierdzeń 9 i 10 wynika (biorąc pod uwagę lemat Wildera), że *w zakresie kontinuów lokalnie spójnych T_2 dziedziczna jednosprzęgłość jest równoważna temu, że przekrój dwu obszarów jest obszarem*.

Wiemy, że kontinua T_2 lokalnie spójne i dziedzicznie jednosprzęgłe są dendrytami. J.N. Simone[206] wykazał, że kontinua klasy T_2 dziedzicznie lokalnie spójne i jednosprzęgłe są dendrytami.

Punkty rozgałęzienia

Punkt x jest punktem rozgałęzienia kontinuum X, jeśli $X - \{x\} = U \cup V \cup W$ są zbiorami otwartymi, niepustymi i rozłącznymi (to samo można wypowiedzieć inaczej: kontinuum X ma w punkcie X więcej niż jeden rozpad na dwa zbiory otwarte, niepuste i rozłączne). Typowym przykładem punktu rozgałęzienia jest *wierzchołek trójnogu*, czyli jedyny punkt wspólny trzech odcinków składających się na triod.

11. *Jeśli punkt jest wierzchołkiem triodu zawartego w dendrycie, to jest punktem rozgałęzienia dendrytu.*

Dowód. Jeśli x jest wierzchołkiem triodu $[a, x] \cup [b, x] \cup [c, x]$ zawartego w dendrycie X, to punkty a, b i c należą do różnych składowych zbioru $X - \{x\}$, jeśliby np. punkty a i b należały do jednej składowej zbioru $X - \{x\}$, to łuk $[a, b]$ je łączący zawarty byłby w tej składowej, tymczasem łukiem łączącym a i b w dendrycie (jest tylko jeden taki łuk) jest łuk $[a, x] \cup [x, b]$ mający punkt poza tą składową. Rozpad zbioru $X - \{x\}$ na trzy zbiory otwarte dostaniemy, biorąc, np. składową punktu a, składową punktu b i dopełnienie ich sumy w $X - \{x\}$.

Pomijamy łatwy dowód implikacji odwrotnej.

Teraz już nietrudno dowieść, że:

12. *Dendryt nie mający punktów rozgałęzienia jest łukiem.*

Dowód. Niech a i b będą dwoma punktami, z których żaden nie rozspaja dendrytu X. Ich istnienie zapewnia twierdzenie Moore'a z *Wykładu V*. Niech $[a, b]$ będzie jedynym łukiem łączącym w X punkty a i b. Pokażemy, że $[a, b] = X$.

Przypuśćmy, że tak nie jest i weźmy punkt x dendrytu X spoza $[a, b]$. Na mocy uwagi po twierdzeniu 8, łuk $[a, x]$ przecinałby się z $[a, b]$ wzdłuż pewnego łuku $[a, c]$. W przypadku $c = a$ (lub $c = b$) punkt a (lub punkt b) rozspajałby dendryt na mocy 6. W przypadku $a \neq c \neq b$ punkt c byłby punktem rozgałęzienia, na mocy 8. Oba przypadki są przy naszych założeniach niemożliwe.

Jeśli a i b są punktami dendrytu, to przez (a, b) będzie oznaczony łuk $[a, b]$ po odjęciu końców.

[206] J.N. Simone: *A characterization of hereditarily locally connected unicoherent continua*, Glasnik Matematički 15 (1980), s. 203—207.

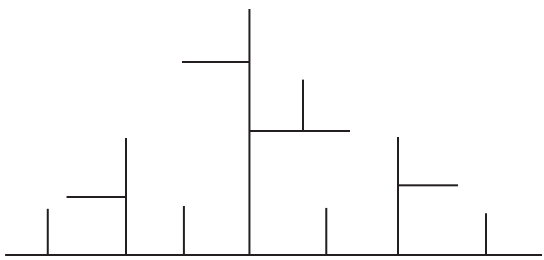
13. *Jeśli na* (a, b) *nie ma punktów rozgałęzienia dendrytu, to* (a, b) *jest podzbiorem otwartym dendrytu.*

Dowód. Niech X będzie dendrytem. Niech G będzie składową punktu b w zbiorze $X - \{a\}$ i niech H będzie składową punktu a w zbiorze $X - \{b\}$. Przekrój $G \cap H$ jest obszarem (wynika to ze stwierdzenia nr 9) i zawiera zbiór (a, b). Pokażemy, że $G \cap H = (a, b)$, co zakończy dowód.

Niech $c \in G \cap H - (a, b)$. Ponieważ $G \cap H$ jest obszarem, więc każdy punkt na (a, b) daje się połączyć z punktem c łukiem zawartym w $G \cap H$. Niech x będzie pierwszym, licząc od c, punktem na takim łuku należącym do (a, b). Zbiór $[c, x] \cup [a, b]$ jest trójnogiem o wierzchołku x. Stąd, punkt x jest punktem rozgałęzienia dendrytu wbrew założeniu, że na (a, b) takich punktów nie ma.

Oczywiste jest odwrócenie tego stwierdzenia.

Dendryty metryczne mają co najwyżej przeliczalnie wiele punktów rozgałęzienia.



Rys. 63. Dendryt, którego zbiór punktów rozgałęzienia jest gęsty

Wynika to z ogólnego twierdzenia o punktach rozgałęzienia kontinuów metrycznych z *Wykładu V.* Nietrudno wszakże o dendryty (metryczne), których zbiór punktów rozgałęzienia jest gęsty w całości (rys. 63).

Topologia dendrytu

Jeśli X jest dendrytem, to składowe zbiorów $X - \{p\}$, $p \in X$ — nazywane *odgałęzieniami* w p — jako składowe zbiorów otwartych w przestrzeni lokalnie spójnej są otwarte. Zbiory te generują topologię dendrytu. Ale więcej mówi następujące

Twierdzenie. *Jeśli D jest podzbiorem gęstym dendrytu X, to składowe zbiorów $X - \{p\}$, gdzie p przebiega zbór D i zbiór B punktów rozgałęzienia dendrytu X, generują topologię w X.*

Dowód. Niech U będzie otwarte w X i niech $x \in U$. W punktach $p \in U \cap (D \cup B)$ weźmy pod uwagę te składowe zbiorów $X - \{p\}$, do których punkt x nie należy. Składowe te — jak już zauważyliśmy — są otwarte. Pokażemy, że pokrywają zbiór $X - U$.

Istotnie, jeśli $y \in X - U$, to na łuku $[x, y]$ jest punkt z taki, że łuk $[x, z]$ jest zawarty w U. Na łuku $[x, z]$ są punkty zbioru D, jeśli nie ma tam punktów rozgałęzienia. Niech p będzie punktem łuku $[x, z]$ należącym do $D \cup B$. Punkt p rozspaja między x i y, więc y należy do pewnej składowej zbioru $X - \{p\}$.

Wobec zwartości zbioru $X - U$ skończona ilość wspomnianych składowych zbiorów $X - \{p\}$ pokrywa $X - U$, a przekrój tych spośród nich, do których należy punkt x, jest otoczeniem otwartym punktu x zawartym w U.

Wiemy (*Wykład V*), że jeśli kontinuum zawiera podzbiór gęsty mocy m, to moc zbioru jego punktów rozgałęzienia nie przekracza m. Stąd moc sumy obu tych zbiorów nie przekracza m, tzn. że nie przekracza gęstości. Z dowiedzionego twierdzenia dostajemy

Wniosek[207]. *Dla dendrytów waga $\leqslant$ stopień ośrodkowości.*

Nierówność przeciwna jest ogólnie prawdziwa. Stąd *w zakresie dendrytów metryzowalność jest równoważna ich ośrodkowości.*

Dendryty zachowują się więc pod tym względem jak obrazy ciągłe odcinków uogólnionych.

Dendryty są obrazami ciągłymi odcinków. Dla dendrytów metrycznych wynika to już z ich lokalnej spójności (twierdzenie Hahna—Mazurkiewicza) ogólnie wynika to z dziedzicznej lokalnej spójności dendrytów (J. Nikiel (1988), por. uwaga w *Wykładzie VII*, przypis 193).

Ale niezależnie od tych ogólnych twierdzeń znane są specyficzne konstrukcje pochodzące jeszcze od Mengera i przeniesione później na dendryty niemetryczne, w których — przy odwzorowaniach z okręgów — punkt dendrytu przyjmowany jest tyle razy, na ile składowych punkt rozspaja dendryt.

Od Eberhardta pochodzi następujące twierdzenie metryzacyjne: *jeśli dendryt ma własność Suslina, wszystkie łuki w nim zawarte są ośrodkowe i ilość jego punktów rozgałęzienia jest co najwyżej przeliczalna, to jest ośrodkowy, więc metryzowalny.* Wskazówka: łuki bez końców, na których dendryt nie ma punktów rozgałęzienia, są zbiorami otwartymi (por. twierdzenie wyżej)[208].

Jeśli opuścić założenie o przeliczalności zbioru punktów rozgałęzienia, to twierdzenie staje się równoważne hipotezie Suslina[209].

Istnieją dendryty dowolnej wagi, których wszystkie łuki są ośrodkowe, np. suma odcinków w kostce Tichonowa łączących punkt O z punktami o jednej współrzędnej niezerowej.

---

[207] C. Eberhart: *Metrizability of trees*. Fund. Math. 65 (1969), s. 43—50; G.G. Miller: *Dendritic continua*. Doctoral Dissertation, University of Missouri, Kansas City 1968. Ogólniejsze ujęcie (zwartość zastąpiona jest *peryferyjną zwartością*) można znaleźć u W.W. Proizwołowa: *O pierifiericzeski kompaktnych drewowidnych prostranstwach*. Doklady AN SSSR 189 (1969), s. 724—729; *O nasledstwiennoj i kolektiwnoj normalnosti pierifiericzeski kompaktnogo driewowidnogo prostranstwa*, Doklady AN SSSR 193 (1970), s. 1000—1003.

[208] Założenie o przeliczalności zbioru rozgałęzień można zastąpić założeniem własności Suslina. B.J. Pearson: *Dendritic decompositions of generalized closed curves*. Coll. Math. 38 (1978), s. 197—212; por. także pracę przeglądową J. van Milla i E. Wattela: *Dendrons*, rapport 156, Vrije Universiteit, Amsterdam 1980.

[209] J. van Mill, E. Wattel: *Souslin dendrons*, rappport 67, Vrije Universiteit, Amsterdam 1977.

Z ostatnio dowiedzionego twierdzenia można wydostać jeszcze jeden szczegół:

14. *Jeśli punkt nie rozspaja dendrytu, to odgałęzienia, do których należy, tworzą bazę otoczeń wokół tego punktu.*

Dowód. Niech U będzie otoczeniem otwartym punktu x. Na mocy dowiedzionego twierdzenia istnieje zbiór V będący przekrojem skończenie wielu odgałęzień w punktach w punktach $a_1,..., a_k$ — oczywiście różnych od x — taki że $x \in V \subset U$. Łuki $[a_1, x],..., [a_k, x]$ mają łuk wspólny $[a, x]$ zawarty w V. Na łuku $[a, x]$ są punkty rozgałęzienia dendrytu bądź punkty ustalonego zbioru gęstego. Niech W będzie odgałęzieniem w którymkolwiek z punktów. Mamy $x \in W \subset V \subset U$.

Przestrzeń jest nazywana *superzwartą*[210], jeśli jej topologia jest generowana przez rodzinę zbiorów otwartych taką, że każde pokrycie złożone z elementów tej rodziny zawiera pokrycie dwuelementowe. Przestrzeń superzwarta jest zwarta na mocy lematu Alexandera. Odcinki są superzwarte; superzwartość odcinka $[a, b]$ realizowana jest przez rodzinę półodcinków $[a, x)$ i $(y, b]$. *Dendryty są superzwarte.* Superzwartość dendrytu realizowana jest (podobnie jak dla odcinka) przez odgałęzienia w punktach, tj. przez składowe dopełnień zbiorów jednopunktowych. W nietrudnym dowodzie należy wziąć pod uwagę następującą własność odgałęzień: *Jeśli U i V są odgałęzieniami, $U \not\subset V$, $V \not\subset U$ i $U \cap V \neq \emptyset$, to U i V pokrywają dendryt*[211].

Brzegi obszarów

Przez brzeg zbioru A w przestrzeni X rozumie się zbiór $\delta A = \mathrm{cl}\, A \cap \mathrm{cl}\,(X - A)$, tj. część wspólną domknięcia zbioru i domknięcia jego dopełnienia; jeśli A jest zbiorem otwartym, to $\delta A = (X - A) \cap \mathrm{cl}\, A$.

Jeśli U jest odgałęzieniem kontinuum X w punkcie x, to oczywiście $\delta U = \{x\}$. Twierdzenie można teraz wyrazić tak: *topologia dendrytu jest generowana przez zbiory (otwarte) o brzegach jednopunktowych i ma bazę złożoną ze zbiorów (otwartych) o brzegach skończonych* (elementami bazy są przekroje skończonej ilości odgałęzień; ich brzegi są skończone, co wynika z ogólnie prawdziwego wzoru: $\delta(A_1 \cap ... \cap A_k) \subset \delta A_1 \cap ... \cap A_k$).

Kontinua mające bazy złożone ze zbiorów (otwartych) o brzegach skończonych nazywane są *regularnymi* — *krzywymi regularnymi*. Przez *krzywą* rozumie się kontinuum jednowymiarowe, tj. mające bazę zbiorów otwartych o brzegach punktokształtnych. Krzywe regularne są lokalnie spójne — por. końcowy wniosek *Wykładu VI*. Dowiedliśmy, że dendryty są krzywymi regularnymi[212].

---

210 J. de Groot: *Supercompactness and superstensions. Symposium*. Berlin 1967, Berlin 1969, s. 89—90. Nietrywialny jest dowód, że wielościany są superzwarte. Przestrzenie metryczne zwarte są superzwarte; M. Strok, A. Szymański: *Compact metric spaces have binary bases*. Found. Math. 89 (1974), s. 81—91. Wśród licznych dowodów wyróżnia się naturalnością dowód W. Dębskiego: *Another geometric proof of supercompactness of compact metric spaces*. Coll. Math. 48 (1984), s. 205—208. Wśród przestrzeni zwartych T_2 są przestrzenie nie będące superzwartymi: M.G. Bell: *Not every compact Hausdorff space is supercompact*. General Top. and Appl. 8 (1978), s. 151—155.

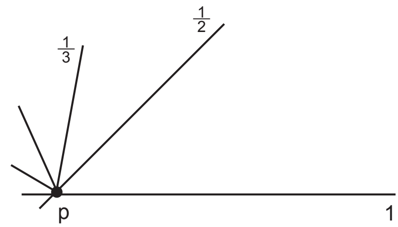
211 Lemat Alexandra redukuje warunek zwartości do zbiorów generujących topologię. Dowód poprzez lemat Kuratowskiego—Zorna.

212 Jan van Mill, E. Wattel: *Dendrons, loco cit.*

W zakresie krzywych regularnych pozostaje w mocy wynikanie: ośrodkowość $\Rightarrow$ metryzowalność (Cornette, 1974; Miller, 1968). Krzywe regularne metryczne stanowią jeden z obiektów *teorii krzywych* (kontinuów metrycznych jednowymiarowych), tradycyjnemu rozdziałowi topologii, któremu poświęcona jest w całości książka Mengera (1932) i duża część drugiego tomu *Topologie* Kuratowskiego.

Każdy punkt krzywej regularnej ma bazę otoczeń o brzegach skończonych; jeśli ilość punktów na brzegach otoczeń takiej bazy nie przekracza liczby k, to mówimy, że punkt jest *rzędu* $\leqslant k$; mówi się, że punkt jest *rzędu* k, jeśli tego k nie można zmniejszyć. Jeśli punkt krzywej regularnej nie jest *rzędu* k dla żadnego k naturalnego, to mówi się, że punkt jest *rzędu nieskończonego*.

Punkt p dendrytu na rys. 64 jest jedynym punktem rzędu nieskończonego tego dendrytu, inne są rzędu 2 i rzędu 1.



Rys. 64. Bardziej formalnie można by określić ten dendryt jako sumę odcinków wychodzących z punktu {0, 0,...} kostki Hilberta i mających kierunki osi współrzędnych

Nie jest wcale prosty związek punktów rzędu k z punktami, które rozspajają dendryt na k składowych. Jedna z nierówności słabych jest oczywista, ale nie jest łatwo pokazać, że jeśli rząd w punkcie jest $\geqslant k$, to z tego punktu wychodzi co najmniej k łuków rozłącznych poza tym punktem. Jest to słynny *n-Beinsatz* Mengera.

Końce dendrytu

Punkty rzędu 1 są nazywane *końcami*.

Na odcinku jedynie jego końce, tj. punkty nierozspajające, są punktami rzędu 1. Z twierdzenia 14 wynika, że:

15. *W dendrytach zbiór końców pokrywa się ze zbiorem punktów nierozspajających*.

Widzimy więc, że punkty dendrytu dzielą się na rozspajające i na te, które są końcami. *Punkty rozspajające stanowią podzbiór gęsty dendrytu*: w każdym zbiorze otwartym niepustym, zawierającym (wobec lokalnej spójności) obszar niepusty, w którym są łuki nie redukujące się do punktów, a na nich punkty rozspajające dendryt. Z twierdzenia 14 wynika, że *zbiór końców dendrytu jest całkowicie niespójny*. Jest więc punktokształtny. Pozostanie punktokształtny, jeśli będzie powiększony o dowolny podzbiór dendrytu o mocy mniejszej niż continuum; Zarankiewicz, 1927 (*locco cit.*).

Łatwym spostrzeżeniem jest to, że żaden podzbiór zbioru końców nie rozpsaja dendrytu. Dendryt na rys. 63 zawiera podzbiór gęsty złożony z samych punktów rozgałęzienia. Są to rozgałęzienia rzędu skończonego.

Są dendryty, których zbiór punktów rzędu nieskończonego jest gęsty w całości. Tego rodzaju dendrytem jest dendryt Ważewskiego—Mengera[213], nazywany dendrytem uniwersalnym wobec tej jego własności, że każdy dendryt metryczny można weń zanurzyć (Menger, 1927). Ponieważ konstrukcja daje się przeprowadzić na płaszczyźnie, więc wnioskuje się stąd, że *dendryty metryczne są zanurzalne w płaszczyźnie*[214]. Tej własności samo określenie dendrytu nie zapewniała.

16. *Jeśli Y jest podkontiuum dendrytu X (jest ono wtedy dendrytem), to domknięcia składowych zbioru $X - Y$ przecinają się z Y w pojedynczych punktach. Składowe te są odgałęzieniami dendrytu X w tych punktach.*

Dowód. Niech U będzie składową punktu a w $X - Y$. Niech $b \in Y$. Niech y będzie pierwszym na łuku $[a, b]$ punktem kontinuum Y. Mamy $\overline{U} \cap Y = \{y\}$, czego się łatwo dowodzi, biorąc pod uwagę, że Y jest dendrytem, a składowe zbioru $X - Y$ są otwarte w X. To również wystarcza dla dowodu dodatkowej tezy.

17. Jeśli podkontinuum Y dendrytu X jest różne od X, to na mocy **16** składowe zbioru $X - Y$ są odgałęzieniami. W każdym odgałęzieniu jest (na mocy twierdzenia Moore'a z *Wykładu V*) co najmniej jeden koniec dendrytu X.

Stąd żadne podkontinuum właściwe dendrytu Y nie zawiera całego zbioru końców dendrytu X. Inaczej: *jeśli podkontinuum dendrytu zawiera wszystkie jego końce, to jest równe całości.*

Ogólniej, niech S będzie podzbiorem dendrytu X i niech $D(S)$ będzie najmniejszym podkontinuum dendrytu X zawierającym S. Zbiór $D(S)$ jest dendrytem, którego zbiór końców jest zawarty w S. Dendryt $D(S)$ nazwijmy generowanym przez S.

Twierdzenie. *Zbiór końców dendrytu ośrodkowego jest zbiorem typu G_δ.*

Dowód. Niech $K(X)$ będzie zbiorem końców dendrytu ośrodkowego X. Niech $A = \{a_1, a_2,...\}$ będzie podzbiorem przeliczalnym i gęstym dendrytu X zawartym w $X - K(X)$ (podprzestrzeń $X - K(X)$ jest również ośrodkowa, bo dendryty ośrodkowe mają bazy przeliczalne i dlatego są w dziedzicznie ośrodkowe). Dendryty $D_n = D(\{a_1,...a_n\})$ są wszystkie zawarte w $X - K(X)$. Pozostaje wykazać, że $\cup \{D_n : n = 1, 2,...\} \subset X - K(X)$.

Niech $x \in X - K(X)$. Punkt x rozspaja dendryt X. Jeśli więc $X - \{x\} = U \cup V$, gdzie U i V są otwarte, rozłączne i niepuste. Jest $a_m \in U$ i $a_n \in V$ dla pewnych m i n. Punkt x leży na łuku $[a_m, a_n]$, a więc na dendrycie $D_{\max\{m,n\}}$.

---

213 T. Ważewski: *Sur les courbes de Jordan ne renfermant aucune courbe fermée de Jordan*. Ann. de la Soc. Pol. Math. **2** (1923), s. 49—170; K. Menger: *Kurventheorie*, X. 6, s. 318; także tego samego autora *Zur allgemeinen Kurventheorie*. Fund. Math. **10** (1927), s. 96—115.

214 Istnieją dowody spłaszczalności dendrytów metrycznych nie wymagające uprzedniej konstrukcji dendrytu uniwersalnego; H.M. Gehman: *Concerning acyclic continuous curves*. Trans Amer. Math. Soc. **29** (1927), s. 551—568. Spłaszczalność dendrytów można by dostać z pewnych ogólnych twierdzeń, np. z twierdzenia Claytora (1937), które charakteryzuje niespłaszczalne kontinua, lokalnie spójne, przez zawieranie się w nich pewnych elementarnych niespłaszczalnych kontinuów, których dendryty nie zawierają. Na temat kryteriów niespłaszczaklności w zakresie pewnego typu kontinuów por. artykuł J.J. Charatonika: *Planability of curves*. Proc. Conf. Topology and Measure 7, Binz GDR, 1987, Greifswald 1988, s. 137—145.

Twierdzenie o punktach stałych dla dendrytów

Niech Y będzie podkontinuum dendrytu X; wiemy z twierdzenia 16, że skłądowe S zbioru $X - Y$ są odgałęzieniami w X, przy tym zbiory $Y \cap \mathrm{cl}\, S$ sa jednopunktowe. Określamy odwzorowanie $r : X \to Y$ będące na Y tożsamością, a punkty składowych S zbioru $X - Y$ przeprowadzając w jedyny punkt zbioru $Y \cap \mathrm{cl}\, S$. Odwzorywanie r jest ciągłe i jest retrakcją: nazwijmy je *retrakcją naturalną* dendrytu X na Y.

18. *Jeśli $\mathcal{P}$ jest pokryciem dendrytu X zbiorami otwartymi, to istnieje dendryt skończony $Y \subset X$ taki, że składowe zbioru $X - Y$ są zawarte w elementach pokrycia $\mathcal{P}$.*

Dowód. Bez zmniejszenia ogólności można przyjąć, że $\mathcal{P}$ jest pokryciem skończonym (zwartość dendrytu) złożonym ze zbiorów z bazy topologii, której zbiory mają brzegi skończone i że końce dendrytu nie należą do tych brzegów. Dendryt Y generowany przez zbiór (skończony) punktów należących do brzegów δU zbioru U należących do $\mathcal{P}$ jest zapowiedzianym dendrytem.

Wynika stąd (wobec wcześniejszej uwagi), że

19. *Dla każdego pokrycia dendrytu zbiorami otwartymi istnieje retrakcja naturalna* na dendryt skończony, dla której *przeciwobrazy punktów zawarte są w elementach tego pokrycia.*

Pokrycia $\mathcal{P}$ mogą być dowolnie drobne. Stąd, w szczególności, jeśli X jest dendrytem metrycznym, to dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje retrakcja naturalna dendrytu X na pewien dendryt skończony, będąca ε-odwzorowaniem.

Twierdzenie. *Odwzorowania ciągłe dendrytu w siebie mają punkty stałe.*

Dowód rozpada się na kilka kroków i jest podobny do znanego dobrze dowodu twierdzenia o punkcie stałym dla kostki Hilberta[215].

Dowody dwu następujących, dobrze znanych, stwierdzeń pomijamy.

1. *Odwzorowania ciągłe odcinka w siebie mają punkty stałe*[216].

2. *Jeśli przestrzeń jest sumą dwu podprzestrzeni domkniętych o przekroju jednopunktowym i na obu przestrzeniach odwzorowania ciągłe mają punkty stałe, to również na całej przestrzeni odwzorowania ciągłe mają punkty stałe*[217].

3. *Stąd wnioskujemy, że odwzorowania ciągłe na dendrytach skończonych mają punkty stałe.*

---

[215] Por. dowód w książce autora *Wykłady z topologii. Topologia przestrzeni euklidesowych*, s. 106.

[216] Dotyczy to odcinków niekoniecznie metrycznych.

[217] Proste twierdzenie z trudnym dowodem: nie zakłada się żadnych warunków oddzielalności; znane z jednej z prac K. Borsuka. Nie wystarczy założyć, że część wspólna podprzestrzeni jest odcinkiem; R.H. Bing: *The elusive fixed point property*. Amer. Math. Monthly **76** (1969), s. 119—132.

Odnotujmy następujące ogólne, dobrze znane, kryterium istnienia punktów stałych.

4. *Jeśli f jest odwzorowaniem ciągłym przestrzeni zwartej X klasy* T_2 *w siebie i dla każdego pokrycia* $\mathcal{P}$ *przestrzeni X zbiorami otwartymi istnieje punkt x taki, że x i f*(*x*) *należą do tego samego elementu pokrycia* $\mathcal{P}$, *to f ma punkty stałe.*

Dla zakończenia dowodu nich $f : X \to X$ będzie odwzorowaniem ciągłym dendrytu. Odwzorowanie to spełnia warunki kryterium 3; istotnie, mając pokrycie $\mathcal{P}$ dendrytu X zbiorami otwartymi, bierzemy dendryt skończony Y zawarty w X, mający własność zapewnioną przez **18.** Niech $r : X \to Y$ będzie retrakcją naturalną istniejącą dla pokrycia $\mathcal{P}$ i dendrytu Y na mocy **19.** Odwzorowanie $(r \circ f) \mid Y : Y \to Y$ ma punkt stały, na mocy wniosku z 1 i 2; ten punkt jest punktem x czyniącym zadość wymaganego w 4 kryterium dla pokrycia $\mathcal{P}$ (punkty x i $f(x)$ należą bowiem do tego samego elementu pokrycia $\mathcal{P}$).

Twierdzenie o punkcie stałym dla dendrytów (w tej ogólności) było dowiedzione przez A.D. Wallace'a (1941), L.E. Warda (1966) oraz w artykule J. van Milla i E. Wattela (1980)[218]. Dla dendrytów metrycznych twierdzenie to znane było już w latach dwudziestych[219].

---

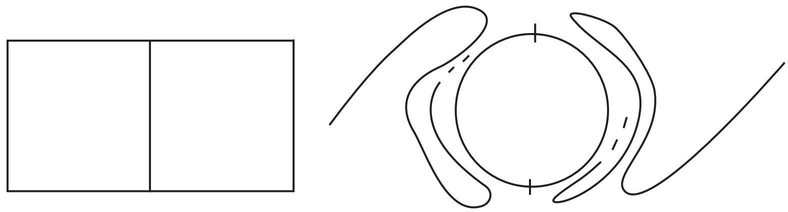
[218] A.D. Wallace: *A fixed point theorem*. Bull. Amer. Math. Soc. 51 (1945), 413—416; inny dowód (i ogólniejsze stwierdzenie): L.E. Ward, Jr.: *Mobs, trees, and fixed points*. Proc. Amer. Math. Soc. 8 (1957), s. 798—804; J. van Mill, E. Wattel: *Dendrons*.

[219] Dowód jest u Mengera, *Kurventheorie*, s. 312, z powołaniem się na Scherrera (1926).

Wykład IX. Kontinua nierozkładalne

∗ Jeziora Wady ∗ Kontinuum Knastera ∗ O zbiorach szeroko spójnych Swingle'a ∗ Kompozanty ∗ Twierdzenie Mazurkiewicza o ilości kompozant kontinuum nierozkładalnego metrycznego ∗ Kontinua solenoidalne i solenoidy ∗ Kontinua łańcuchowe

Kontinuum wielopunktowe jest nazywane *nierozkładalnym*, jeśli nie daje się przedstawić jako suma dwu podkontinuów właściwych (tj. różnych od całości). Nierozkładalność jest osobliwością: odcinki, kostki, okrąg, dendryty nie są nierozkładalne; mówi się, że są *rozkładalne*.



Rys. 65. Rozkłady pewnych prostych kontinuów

Rozkładalne są wszelkie kontinua lokalnie spójne. Ogólniej:

1. *Kontinua zawierające podkontinua właściwe o wnętrzu niepustym są rozkładalne.*

D o w ó d. Niech X będzie kontinuum, a C jego podkontinuum właściwym o wnętrzu niepustym. Jeśli C nie rozspaja, to $X = C \cup \mathrm{cl}(X - C)$ jest odpowiednim rozkładem. Jeśli C rozspaja i $X - C = U \cup V$ jest rozpadem na dwa zbiory otwarte niepuste, to odpowiednim rozkładem jest rozkład $X = (U \cup C) \cup (V \cup C)$; to, że $U \cup C$ i $V \cup C$ są kontinuami, wiemy z *Wykładu IV*.

Kontraponując, stwierdzamy, że

2. *W kontinuum nierozkładalnym podkontinua właściwe są zbiorami rzadkimi.*

Stwierdzenie odwrotne jest oczywiste: *jeśli wszystkie podkontinua właściwe są rzadkie, to kontinuum jest nierozkładalne* (bo suma dwu zbiorów rzadkich nie może dać całości). Stąd *kontinuum jest nierozkładalne wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jego podkontinua właściwe są rzadkie.*

Ze wspomnianego już twierdzenia z *Wykładu IV* wynika, że

3. *Kontinuum nierozkładalne nie jest rozspajane przez żadne podkontinuum.*

W ogólnym wątku tego wykładu nie zakładamy żadnych warunków oddzielania, chociaż warunek T_1 jest warunkiem naturalnym i w dalszych rozważaniach kontinua nie spełniające tego warunku nie pojawią się jako przykłady. Zasadnicza część wykładu będzie dotyczyła kontinuów metrycznych.

Samo istnienie kontinuów nierozkładalnych jest raczej nieoczywiste.

*

Kontinua nierozkładalne odkrył L.E.J. Brouwer jako brzegi pewnych obszarów płaszczyzny. Jego praca *Zur Analysis Situs*[220] prostowała pewne sformułowania Schoenfliesa[221] co do budowy wspólnych brzegów obszarów płaskich. Brouwer pokazał, że wspólny brzeg obszarów płaskich może nie mieć rozkładu na *dwie krzywe* — jak pisał — i wskazał na przykład wspólnego brzegu trzech obszarów. Konstrukce Brouwera weszły do literatury w anegdotycznej formie *jezior Wady*, którą nadał im Yoneyama[222]. Oryginalny opis Brouwera przytacza w swojej książce Kerékjártó[223].

Jeziora Wady — wspólny brzeg trzech obszarów płaskich.

Umieśćmy wyspę F na morzu G, która ma postać koła z brzegiem. W ten sposób morze $G = E^2 - F$ jest zbiorem otwartym. Na wyspie F są dwa jeziora, zimne i ciepłe, oba będące wnętrzami kół rozłącznych.

„Rozważmy następujący plan robót[224]. W ciągu pierwszej godziny poprowadzimy po jednym, ślepo kończącym się kanale, wychodzącym z obu jezior i morza, tak by od każdego miejsca pozostawionego lądu było nie dalej niż 1 km od wody morskiej i od wód z obu jezior; kanały nie powinny się stykać z innymi ani same ze sobą (por. rys. 66) i są uważane — wraz z wodami jezior i morza — za zbiory otwarte.

W następnej półgodzinie każdy z kanałów przedłużamy tak, by od każdego miejsca pozostawionego lądu było nie dalej niż 1/2 km od wody morskiej i od wód z obu jezior. W następnej 1/4 godziny kanały przedłużamy tak, by od każdego miejsca pozostawionego lądu, nie dalej niż 1/4 od wody morskiej oraz od wód zimnej i ciepłej z jezior itd.; po upływie $1 + (1/2) + ... + (1/2^n)$ godzin kanały będą przedłużone tak, że odległość każdego miejsca pozostawionego lądu do wody z morza i obu jezior nie przekracza $1/2^n$ km. Po dwu godzinach robót z wyspy

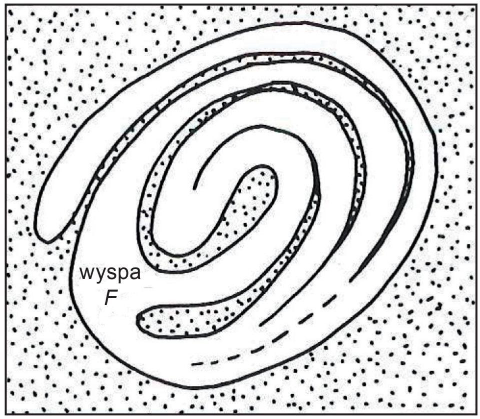
[220] L.E.J. Brouwer: *Zur Analysis Situs*. Math. Ann. 68 (1910), s. 422—434.

[221] A. Schoenflies: *Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten II*, Bd 2, Teubner, Leipzig 1908, Jahr. der Deutschen Math. Ver., Ergänzugsbände.

[222] K. Yoneyama: *Theory of continuous sets of points*. Tôhoku Math. Journ. 12 (1917), s. 43—158.

[223] B. von Kerékjártó: *Vorlesungen über Topologie*. Springer 1923, s. 118.

[224] P.S. Aleksandrow: *Kombinatornaja topologia*. Moskwa—Leningrad 1947, 68.



Rys. 66. Jeziora Wady

pozostanie jedynie pewien podzbiór domknięty rzadki, taki, że dowolnie blisko każdego jego punktu znaleźć można zarówno wodę morską, jak i wody z obu jezior: ten podzbiór jest wspólnym brzegiem trzech obszarów płaskich — morza i obu jezior."

Przy tak anegdotycznym i niejednoznacznym opisie trudno jest o dowód nierozkładalności wspólnego brzegu jezior Wady, na co zwracał uwagę Urysohn, podając na to pewne warunki wystarczające. Kuratowski dowiódł alternatywy: wspólny brzeg trzech obszarów płaskich jest albo kontinuum nierozkładalnym, albo sumą dwu kontinuów nierozkładalnych[225]. Knaster pokazał, że drugi człon alternatywy Kuratowskiego się realizuje[226]. Późniejsze modyfikacje konstrukcji Brouwera szły w kierunku uproszczeń. Kontinuum zbudowane przez Janiszewskiego (1911)[227] nie rozcina płaszczyzny; bardziej znane jest w formie, jaką nadał mu Knaster. Jest ono *najprostszym* (w możliwym do sprecyzowania znaczeniu) kontinuum nierozkładalnym.

W przestrzeni wspólnym brzegiem trzech obszarów może być już kontinuum lokalnie spójne (Wilder 1993), a nawet ANR (Lubański 1953)[228].

Chociaż szczegółowy opis odpowiednich przykładów jest skomplikowany, a szczegółowe dowody wspomnianych własności nietrywialne, to wytłumaczenie faktu jest stosunkowo proste. W przypadku (płaskim) jezior Wady długości kanałów budowanych w kolejnych etapach rosły nieograniczeni: zbudowane poprzednio kanały przegradzały drogę i trzeba je było obchodzić na całej ich długości. W przestrzeni trójwymiarowej zbudowany już rurociąg nie przegradza drogi nowo budowanym jego odcinkom.

---

[225] K. Kuratowski: *Sur les coupures irréductibles du plan*. Fund. Math. **6** (1924), s. 130—145; *Sur la structure des frontiéres communes á deux régions*, Fund. Math. **12** (1928), s. 214—239; por. również *Topologie II*, s. 403—404; P.S. Urysohn: *Mémoire sur les multiplicités Cantoriennes*. Fund. Math. **7** (1925), s. 30—137; Fund. Math. **8** (1926), s. 225—359; por. *Trudy po topologii*. Moskwa—Leningrad 1951, s. 355

[226] B. Knaster: *Quelques coupures singuliers du plan*. Fund. Math. **7** (1925), s. 264—289.

[227] Z. Janiszewski: *Thèse*. Paris 1911.

[228] R.L. Wilder: *Domains and their boundaries*. Math. Ann. **109** (1933), s. 273—306; M. Lubański: *An example of an absolute neighbourhood retract which is the common boundary of three regions in the 3-dimensional Euclidean space*. Fund. Math. **40** (1953), s. 29—38; P. Swingle: *Connected sets of Wada*. Michigan Math. J. **8** (1961), s. 77—95. Określenie ANR-u można znaleźć w części *Topologia przestrzeni euklidesowych*, s. 68, *Wykładów z topologii*.

Weźmy pod uwagę kulę K z wyciętymi w niej wnętrzami dwu kul rozłącznych; można je uważać za podziemne zbiorniki wody, a zewnętrze kuli K za jeszcze jeden taki zbiornik. Powiększamy zbiorniki, prowadząc z nich nie przecinające się tunele, tak by pozostałość była wspólnym brzegiem wszystkich trzech tak powiększonych zbiorników. Z obu kul i z zewnętrza kuli K wyprowadzamy nie przecinające się tunele docierające do każdego miejsca pozostałości na odległość $\leqslant 1/2$. Następnie przedłużamy je tak, by dotrzeć do każdego miejsca pozostałości na odległość $\leqslant 1/3$. Na ogół nie można tego zrobić w ten sposób, by tunele były prostoliniowe, bo trzeba obchodzić (małymi łukami) poprzednio prowadzone tunele. Poszerzone zbiorniki poszerzamy dalej w podobny sposób: rosną one na kształt drzew. Można je prowadzić tak, by długości nowych gałęzi dążyły do zera. Pozostałość po przeprowadzonej konstrukcji nie jest wspólnym brzegiem wszystkich trzech zbiorników i jest lokalnie spójna (jest nawet ANR-em jako retrakt każdej z danych na początku kul; odpowiednią retrakcję można zbudować dzięki zmniejszającym się do zera długościom kolejno dobudowywanych tuneli).

Najprostsze kontinuum nierozkładalne (według Janiszewskiego). Kontinuum to zapowiadaliśmy na s. 67 jako część wspólną pewnego ciągu zstępującego, $C_1 \supset C_2 \supset \ldots$, wstęg płaskich przedstawionych tam na rys. 29. Teraz zmodyfikujemy nieco rysunek i przedstawimy szczegóły konstrukcji.

Wstęgą C_1 jest prostokąt $ABCD$ — zob. rys. 67 — dany jako suma łańcucha jednakowych kwadratów o boku $a = AB$, stykających się ze sobą bokami. Bok AB nazwijmy początkiem wstęgi C_1.

Ze wstęgi C_1 usuwamy pasmo otwarte o szerokości $a/3$ tak by pozostałość C_2 miała postać wstęgi o kształcie podkowy zapoczątkowanej odcinkiem AB'; jest to spójny łańcuch stykających się ze sobą kwadratów o boku $AB' = a/3$. Jest pewna anomalia przebiegu łańcucha: przy C i D kwadraty odległe w numeracji o 2 mogą stykać się wierzchołkami.

Powtarzamy opisaną operację na wstędze C_2, usuwając z niej środkowe pasmo kwadratu o boku $a/9$, uzyskując wstęgę C_3, domkniętą, w kształcie dwa razy zgiętej podkowy, zaznaczonej na rys. 67. Kontynuujemy postępowanie otrzymując zapowiadany ciąg wstęg.

Rys. 67. Schemat konstrukcji kontinuum Janiszewskiego

Otrzymane kolejno kontinua C_n tworzą ciąg zastępujący $C_1 \supset C_2 \supset \ldots$ Ich przekrój C jest zapowiedzianym kontinuum.

Kontinuum C jest nierozkładalne. Istotnie, niech K będzie podkontinuum właściwym kontinuum C. Istnieje n takie że K nie ma punktów w pewnym niekońcowym (tj. omijającym punkt A) kwadracie wstęgi C_n — na rysunku 67 wyróżniamy tego rodzaju kwadrat na wstędze C_2. Kwadrat ten rozcina wstęgę C_n; pozostałość składa się z dwóch części, z których każda w przecięciu z kontinuum C jest bądź wiązką Cantora, bądź sumą przeliczalnie wielu rozłącznych wiązek Cantora o początku w A. W każdym z tych dwóch przypadków kontiuum K jest pododcinkiem pewnego odcinka wiązki. Jest więc rzadkie w kontinuum C; skąd, wobec dowolności K, nierozkładalność C.

Zbiory szeroko spójne Swingle'a

Jeśli z pasma pojawiającego się w konstrukcji Janiszewskiego—Knastera usuniemy segment rozcinający pasmo, to pozostałość kontinuum rozpada się na łuki, rzadkie w kontinuum, będące składowymi tej pozostałości. Jeśli więc podzbiór spójny kontinuum Janiszewskiego—Knastera nie jest gęsty, to leży na jednym ze wspomnianych łuków.

Kontinuum Janiszewskiego—Knastera w oczywisty sposób spełnia warunek (W) z *Wykładu III* wymagający, by podzbiory otwarte, które nie są gęste w całości, zawierały w swoich brzegach zbory doskonałe. Zastosujmy zatem do tego kontinuum konstrukcję Bernsteina — znaną z *Wykładu III* —dającą położony w tym kontinuum zbiór spójny nie zawierający zbiorów doskonałych i mający punkty w każdym podzbiorze doskonałym (w szczególności w każdym podkontinuum wielopunktowym).

Z obu poczynionych uwag wynika, że zbiór ten nie ma innych podzbiorów spójnych niż gęste.

Tego rodzaju zbiory nazwaliśmy za Swinglem (w *Wykładzie IV*) szeroko spójnymi.

Ich konstrukcja[229] zasadniczo nie różni się od konstrukcji (nieefektywnej) miotełek Knastera—Kuratowskiego, które były wbudowane w kontinua będące lokalnie — pomijając jeden punkt — wiązkami Cantora.

Miotełki Knastera—Kuratowskiego nie są szeroko spójne. Wśród nich są takie, które mogą być zbudowane efektywnie. Nie są znane efektywne konstrukcje zbiorów szeroko spójnych. Nie każdy zbiór szeroko spójny jest dwuspójny[230]. Zbiory dwuspójne bez punktów eksplodujących mogą być zarówno szeroko spójne, jak i nie szeroko spójne[231].

Kompozanty

Przez *kompozantę*[232] punktu x w kontinuum X rozumiemy zbiór tych punktów kontinuum X, które dają się połączyć z punktem x kontinuum różnym od całości. Oczywiście kompozanta jest zbiorem spójnym.

Kompozantą puntku 0 w odcinku $0 \leqslant x \leqslant 1$ jest jego przedział $0 \leqslant x < 1$, kompozantą punktu 1 jest przedział $0 < x \leqslant 1$, a kompozantą punktu nie będącego końcem jest cały odcinek. Kompozanty nie muszą być więc rozłączne. Na okręgu kompozanty wszystkich punktów są równe całości.

4. *Kompozanty kontinuum klasy T_2 są w nim gęste.*

Dowód. Niech X będzie kontinuum klasy T_2. Niech $x \in X$ i niech U będzie podzbiorem otwartym niepustym kontinuum X. Pokażemy, że kompozanta punktu x ma punkty w U.

---

229 P.M. Swingle: *loco cit.*

230 Nietrudno bowiem zbudować metodą Bernsteina zbiór szeroko spójny, tak by zawierał dwa zbiory spójne wielopunktowe rozłączne.

231 Ostatnio M.E. Rudin, A biconnected set in the plane, Topology and ist Appl. 66 (1995), 41—48, opublikowała przykład zbioru dwuspójnego bez punktu eksplodującego, który nie jest szeroko spójny.

232 S. Mazurkiewicz: *Un théorème sur les continus indecomposables*. Fund. Math. 1 (1920), 35—39. Z. Janiszewski, C. Kuratowski: *Sur les continus indecomposables*. Fund. Math. 1 (1920), s. 210—222. C. Kuratowski: *Topologie II*. § 43. VI.

Niech V będzie zbiorem otwartym niepustym takim, że cl $V \subset U$. Niech S będzie składową punktu x w zbiorze $X -$ cl V (oczywiście, zajmujemy się jedynie przypadkiem, kiedy x nie należy do U). Domknięcie cl S składowej S jest — jako kontinuum różne od X — zawarte w kompozancie punktu x. Domknięcie składowej S, a więc i kompozanta punktu x, mają punkty na brzegu zbioru V (co wynika z lematu Janiszewskiego), a więc mają punkty w zbiorze U.

5. *Kompozanty kontinuum nierozkładalnego klasy T_2 są równe, jeśli mają punkty wspólne;* inaczej: *każde dwie są rozłączne.*

Dowód. Niech a i b będą punktami kontinuum nierozkładalnego X. Niech A będzie kompozantą punktu a, a B kompozantą punktu b. Niech $c \in A \cap B$. Niech x będzie dowolnym punktem kompozanty A. Istnieją podkontinua różne od całości, łączące punkt x z a, punkt a z c i punkt c z b. Każde z tych podkontinuów jest rzadkie w X wobec nierozkładalności X. Suma tych trzech podkontinuów jest nadal podkontinuum rzadkim, a więc różnym od całości. Łączy ono punkt x z punktem b. Stąd $x \in B$. Wykazaliśmy więc, że $A \subset B$. Wobec symetrii założeń jest także $B \subset A$.

Kompozanty kontinuum nierozkładalnego (klasy T_2) stanowią więc rozbicie tego kontinuum na podzbiory spójne i gęste, są kompozantami każdego swojego punktu; można je zatem nazwać — w przypadku kontinuów nierozkładalnych — *kompozantami kontinuów.*

Oczywiście,

6. *Kontinuum nierozkładalne klasy T_2 jest nieprzywiedlne między każdymi dwoma punktami należącymi do różnych kompozant.*

7. Jeśli kontinuum (klasy T_2) zawiera dwie kompozanty rozłączne, to jest nierozkładalne.

Dowód. Niech X będzie danym kontinuum, A kompozantą punktu a, B kompozantą punktu b, i niech A i B będą rozłączne. Dla dowodu nierozkładalności X, weźmy podkontinuum C kontinuum X, różne od X, wykazując, że jest ono w X rzadkie. Wobec 4 (gęstość kompozant) jest tak, jeśli C omija A lub B. Niech więc C ma punkt x w A i punkt y w B. Punkt x łączy się w A kontinuum C z punktem a. Suma kontinuów x łączy się w A kontinuum C' z punktem a. Suma kontinuów C i C' jest kontinuum różnym od X (są poza nią pewne punkty kompozanty B). Zatem, punkt y leży w kompozancie A punktu a, co jest niemożliwe wobec rozłączności kompozant A i B. Rozważany przypadek jest zatem niemożliwy, co kończy dowód.

Zauważmy — nie zakładając nierozkładalności — że jeśli kontinuum jest nieprzywiedlne między a i b, to kompozanty punktów a i b są różne (punkt b nie należy do kompozanty punktu a, i na odwrót).

Mogą wszakże nie być rozłączne. Wtedy, jak łatwo zauważyć, ich suma wypełnia całość kontinuum (przypomnijmy przypadek, kiedy kontinuum jest odcinkiem). Korzystając z tej uwagi, nietrudno już dowieść, że:

Jeśli kontinnum jest nieprzywiedlne między każdą parą punktów spośród danej trójki punktów, to jest nierozkładalne; dokładniej kompozanty punktów wspomnianej trójki są wzajemnie rozłączne.

8. *Kompozanty kontinuum metrycznego są F_δ-ami; są I-ej kategorii, jeśli kontinuum jest nierozkładalne.*

Dowód. Niech X będzie kontinuum nierozkładalnym metrycznym. Niech $x \in X$. Niech $\mathcal{P}$ będzie bazą przeliczalną kontinuum X. Niech $\{U_1, U_2,...\}$ będzie zbiorem tych elementów bazy $\mathcal{B}$, do których nie należy punkt x. Niech C_n będzie składową punktu x w zbiorze $X - U_n$. Składowa C_n jest podkontinuum właściwym zawartym w kompozancie C punktu x. Jest więc $C_1 \cup C_2 \cup ... \cup C$.

Inkluzja przeciwna również jest prawdziwa. Niech bowiem K będzie podkontinuum takim, że $x \in K$, i przy tym różnym od X. Jest $U_n \cap K = \emptyset$ dla pewnego n. Składowa C_n (punktu x w zbiorze $X - U_n$) zawiera K. Wynika stąd, że suma kontinuów C_n pokrywa całą kompozantę C punktu x.

Jeśli kontinuum X jest nierozkładalne, to zbiory C_n są rzadkie. Stąd kompozanta C jest zbiorem I-ej kategorii.

Stąd, wobec twierdzenia Baire'a, dostajemy

Twierdzenie. (Mazurkiewicz, 1920). *Kontinuum metryczne nierozkładalne ma nieprzeliczalnie wiele kompozant.*

Dla kontinuów niemetrycznych (nie wychodząc poza klasę T_2) twierdzenie przestaje być prawdziwe: D.P. Bellamy, *Indecomposable continua with one and two composants*, Fund. Math. **101** (1978), 129—134. Przykład Bellamy'ego jest zbudowany środkami ZFC. Dla kontinuum nierozkładalnego $\beta[0, \infty)$ — kompaktyfikacji Čecha—Stone'a półprostej — oszacowania ilości kompozant, zależnie od wariantu ZFC. wahają się od 2^c do 1; por M.E. Rudin, *Composants and βN*, Proc. of the Washington State Univ. Conf. on General Topology (1970), 117—119; D.P. Belamy, *A nonmetric indecomposable continuum*, Duke Math. J. **38** (1971), 15—20; J. Mioduszewski, *Copmposants of βR*, Topology and Measure I, Proc. of the Conference, Zinnowitz GDR, 1974, Greifswald 1978, 257—283; A. Blass, *Near coherence of filters II*, *Applications to operator ideals, The Stone-Čech remainder of a halfline, order ideals of sequences and slenderness of groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **300** (1987), 557—581.

*

Pójście o krok dalej w oszacowaniu ilości kompozant kontinuum nierozkładalnego metrycznego jest już trudniejsze.

Twierdzenie Mazurkiewicza (1927)[233]. *Kontinuum metryczne nierozkładalne ma continuum kompozant.*

[233] S. Mazurkiewicz: *Sur les continus indecomposables*. Fund. Math. 10 (1927), s. 305—310.

Dowód (Dębski)[234]. Niech X będzie kontinuum (metrycznym) nierozkładalnym. Niech U_1, U_2,... będą zbiorami otwartymi stanowiącymi bazę topologii kontinuum X (możemy przyjąć, że wszystkie U_j są różne od X).

Zbudujemy zbiór homeomorficzny ze zbiorem Cantora, zawarty w X, mający na każdej kompozancie kontinuum X co najwyżej jeden punkt. Ponieważ zbiór Cantora ma moc $2^{\aleph_0}$, więc wyniknie z tego, że kontinuum X ma co najmniej $2^{\aleph_0}$ kompozant; kompozant nie może być więcej, gdyż moc $X = 2^{\aleph_0}$.

Aby zbudować zapowiedziany zbiór Cantora, weźmy zbiór U_1 (z bazy) i rozważmy zbiór otwarty niepusty V_1 taki, że $V_1 \subset \mathrm{cl}\, V_1 \subset U_1$. Niech A_0 i A_1 będą różnymi od siebie składowymi punktów wewnętrznych zbioru $X - V_1$; składowe takie istnieją, bo X jest kontinuum nierozkładalnym, dzięki czemu składowe zbioru $X - V_1$ są rzadkie w $X - V_1$ i w rezultacie jest ich nieskończenie wiele.

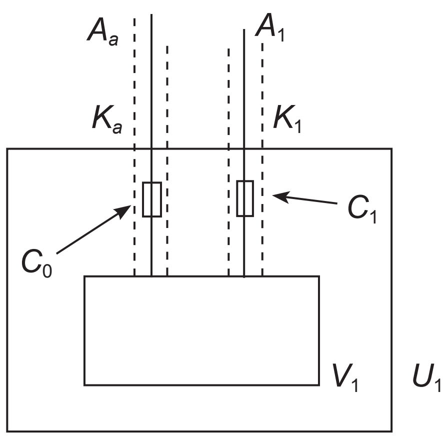
Istnieją zbiory K_0 i K_1, domknięto-otwarte w $X - V_1$, rozłączne niepuste oraz takie, że $A_0 \subset K_0$ i $A_1 \subset K_1$ (korzystamy z tego, że składowe przestrzeni zwartych T_2 są zarazem ich quasi-składowymi). Niech W_0 i W_1 będą zbiorami otwartymi niepustymi o średnicy $\leqslant 1$ takimi, że $W_0 \subset K_0$ i $W_1 \subset K_1$. Przyjmijmy (por. rys. 68):

$$C_0 = \mathrm{cl}\, W_0, \qquad C_1 = \mathrm{cl}\, W_1.$$

Odnotujmy, że

$$C_0 \cap C_1 = \emptyset, \qquad diam\ C_i \leqslant 1$$

(symbol diam oznacza średnicę), i że każda składowa zbioru $X - V_1$ przecina co najwyżej jeden ze zbiorów C_0 i C_1.



Rys. 68. Zbiór Cantora jako selektor częściowy w kontinuum nierozkładalnym

[234] Ten dowód autor zna od W. Dębskiego (około 1980). Wszakże okazało się, że ten rodzaj dowodu był znany wcześniej z pracy K. Kuratowskiego: *Application of the Baire category method to the problem of independent sets*. Fund. Math. **81** (1973), s. 65—72, w której konstrukcja selektora częściowego w postaci zbioru Cantora wynika z ogólnego twierdzenia Mycielskiego o istnieniu zbiorów niezależnych; J. Mycielski: *Independent sets in topoligical algebras*. Fund. Math. 55 (1964), s. 139—147; dowód Dębskiego nie wymaga powoływania się na to twierdzenie, zawierając je *implicite*.

Jest to pierwszy krok indukcyjnej konstrukcji przybliżeń zapowiedzianego zbioru Cantora, która dalej przebiega jak następuje.

Załóżmy, że dla $k \leqslant n$ zbudowaliśmy zbiory $C_{i1...ik}$, $i_j = 0$ lub 1, będące domknięciami zbiorów otwartych $W_{i1\cdots ik}$, takie, że

(1) $$C_{i1\cdots ik-1ik} \subset C_{i1\cdots ik-1}$$

(2) $$C_{i1\cdots ik-1^0} \cap C_{i1\cdots ik-1^1} = \emptyset$$

(3) $$\operatorname{diam} C_{i1\cdots ik} \leqslant 1/k$$

Załóżmy ponadto, że zbudowane są już zbiory otwarte V_k zawarte wraz z domknięciami w U_k, takie że

(4) składowe $A_{i1...ik}$ zbioru $X - V_k$ przecinają co najwyżej jeden ze zbiorów $C_{i1...ik}$,

oraz takie, że

(5) $$W_{i1\cdots ik-1} - V_k \neq \emptyset,$$

a więc takie, że zbiór V_k nie wyczerpuje wnętrza żadnego ze zbiorów $C_{i1\cdots ik-1}$.

Zbudujmy teraz analogiczne zbiory dla $k = n + 1$.

W zbiorze U_{n+1} (kolejny zbiór z bazy) zawiera się wraz ze swoim domknięciem zbiór otwarty V_{n+1} taki, że zbiory $W_{i1\cdots in} - V_{n+1}$ mają wnętrza niepuste.

Niech $A_{i1\cdots in0}$ i $A_{i1\cdots in1}$ będą różnymi od siebie składowymi zbioru $X - V_{n+1}$ takimi, że

$$A_{i1\cdots in in+1} \cap W_{i1\cdots in} \neq \emptyset \qquad \text{dla} \qquad i_{n+1} \in \{0, 1\}$$

(składowych $A_{i1\cdots in in+1}$ jest teraz 2^{n+1}; każdy ze zbiorów $W_{i1\cdots in}$ jest przecinany przez dwie składowe, $A_{i1\cdots in0}$ i $A_{i1...in1}$; istnienie tego rodzaju składowych zapewnione jest przez nierozkładalność kontinuum X, dzięki czemu składowe zbioru $X - V_{n+1}$ są w $X - V_{n+1}$ rzadkie). Niech $K_{i1\cdots inin+1}$ będą zbiorami domknięto-otwartymi w X V_{n+1}, rozłącznymi i takimi że

$$A_{i1\cdots inin+1} \subset K_{i1\cdots inin+1}.$$

Ponieważ zbiory otwarte $K_{i1\cdots inin+1}$ — zawarte w $W_{i1\cdots in}$ — są niepuste, więc w każdym z nich weźmy pod uwagę podzbiór otwarty niepusty $W_{i1\cdots inin+1}$ o średnicy $\leqslant 1/(n + 1)$. Są to zbiory rozłączne, a nawet więcej: zawarte w zbiorach domkniętych rozłącznych. Niech $C_{i1\cdots inin+1}$ będą domknięciami zbiorów $W_{i1\cdots in\ in+1}$. Są to nadal zbiory rozłączne i zawsze w poprzednio już zbudowanych zbiorach $C_{i1\cdots in}$. Jest widoczne, że razem ze zbiorami $W_{i1\cdots in\ in+1}$ i zbiorem oraz ze zbudowanymi już wcześniej zbiorami spełniają warunki V_{n+1} oraz ze zbudowanymi już wcześniej zbiorami spełniają warunki (1)—(5).

Zbiór C będący przekrojem zbiorów $C_n = \cup \{C_{i1\cdots in} : i_j = 0 \text{ lub } 1\}$ jest zbiorem Cantora zawartym w X.

Pokażemy, że punkty zbioru C leżą w różnych kompozantach kontinuum X. Wykażemy, że żadne dwa punkty zbioru C nie leżą na żadnym podkontinuum właściwym kontinuum X. Weźmy w tym celu punkty x i y ze zbioru C, $x \neq y$. Niech $x \in C_{i1} \cap C_{i1i2} \cap \ldots$ i $y \in C_{j1} \cap C_{j1j2} \cap \ldots$. Przypuśćmy, że istnieje podkontinuum właściwe P kontinuum X takie, $x \in P$ i $y \in P$.

Istnieje n takie, że P jest rozłączne z U_n. Składowa zbioru $X - V_n$ zawierająca kontinuum P łączy zbiory $C_{i1\cdots i_n}$ i $C_{j1\cdots j_n}$. Zbiory te muszą być równe, tzn. że musi być $i_1 = j_1, \ldots, i_n = j_n$, w przeciwnym przypadku wobec $C_{i1\cdots i_n} \subset K_{i1\cdots i_n}$ i $C_{j1\cdots j_n} \subset K_{j1\cdots j_n}$ rozłączne, wbrew (4). Ponieważ istnieją zbiory U_n z bazy rozłączne z P i mające dowolnie duże wskaźniki n, więc $i_k = j_k$ dla wszelkich k. Stąd $x = y$; sprzeczność.

Dowód polegał na zbudowaniu zbioru mającego po co najwyżej jednym punkcie z continuum kompozant. Wartości tak zbudowanego selektora tworzą w podanej tu konstrukcji zbiór Cantora. Jak pokazał H. Cook (1964), nie można zbudować *pełnego* selektora w postaci zbioru typu F_δ, tym samym w postaci zbioru Cantora[235].

*

Jeśliby kontinua nierozkładalne nie były odkryte jako wspólne brzegi obszarów, byłyby odkryte przez algebraików. Konstrukcja, którą teraz opiszemy, ma źródła algebraiczne i wywodzi się od Vietorisa[236].

Niech $C \times [0, 1]$ będzie wiązką nad discontinuum C[237]. Niech $h : C \to C$ będzie homeomorfizmem na C. W wiązce $W(C) = C \times [0,1]$ zidentyfikujmy punkty $(c, 0)$ z punktami $(h(c), 1)$. Otrzymana przestrzeń ilorazowa $W(C)/h$ jest przestrzenią zwartą klasy T_2, jeśli C jest klasy T_2, metryczną, jeśli C jest metryczne. Niech $p_h : W(C) \to W(C)/h$ będzie odwzorowaniem ilorazowym. Skleja ono dolny brzeg $C \times \{0\}$ wiązki z jej górnym brzegiem $C \times \{1\}$ (w czym jest analogia ze wstęgą Möbiusa).

Przestrzeń ilorazowa $W(C)/h$ nie musi być spójna. Jeśli h jest tożsamością, to przestrzeń ilorazowa jest sumą rozłącznych ze sobą okręgów, będących jej składowymi, ale

Lemat. *Przestrzeń W(C)/h jest spójna, jeśli*

(6) $$h(U) \cap (C - U) \neq \emptyset \quad \text{lub} \quad U \cap h(C - U) \neq \emptyset$$

dla każdego podzbioru domknięto-otwartego U dicontinuum C.

Dowód. Jeśliby przestrzeń $W(C)/h$ nie była spójna, to otrzymalibyśmy jej rozpad na zbiory domknięto-otwarte A i B, które dawałyby rozpad wiązki $C \times$

---

[235] H. Cook: *On subsets of indecomposable continua*. Coll. Math. **13** (1964), s. 37—63; tw. 4. W tej samej pracy zob. tw. 8, inny dowód twierdzenia Mazurkiewicza.

[236] L. Vietoris: *Über den höheren Zusammenhang kompakter, Räume und eine Klasse von zusammenhängenden Abbildungen*. Math. Ann. 97 (1927), s. 454—472.

[237] Przez *dicontinuum* rozumie się przestrzeń zwartą T_2 mającą bazę złożoną ze zbiorów domknięto-otwartych. W celu śledzenia dalszych rozważań wystarczy mieć na uwadze zbiór Cantora.

[0, 1] na ich przeciwobrazy p_h^{-1} (A) i p_h^{-1} (B). Jako podzbiory domknięto-otwarte wiązki są zbiorami postaci $U \times [0, 1]$ i $V \times [0, 1]$, gdzie U i V są podzbiorami domknięto-otwartymi discontinuum C, które w sumie dają C i są rozłączne.

Dostajemy $h(U) \cap V = \emptyset = U \cap h(V)$ wobec rozłączności zbiorów p_h^{-1} (A) i p_h^{-1} (B), co przeczy (6).

Warunek (6) — dostateczny dla spójności $W(C)/h$ — jest również, jak łatwo zobaczyć, warunkiem koniecznym. Warunek ten w oczywisty sposób jest spełniony, jeśli w C istnieje punkt x, którego jedna z *orbit*[238], lub orbita dla h^{-1} $\{h^n(x) : n = 0, 1, 2, ...\}$ jest gęsta w C.

Zbiór A jest nazywany zbiorem *niezmienniczym* dla homeomorfizmu h, jeśli $h(A) = A$. Warunek (6) orzeka, że nie istnieją dla h zbiory niezmiennicze d.-o. niepuste i różne od całości. Wobec zwartości C, przestrzeń $W(C)/h$ jest wtedy kontinuum.

Twierdzenie. *Z istnienia punktu o orbicie gęstej dla obu homeomorfizmów h i h^{-1} wynika nierozkładalność kontinuum $W(C)/h$.*

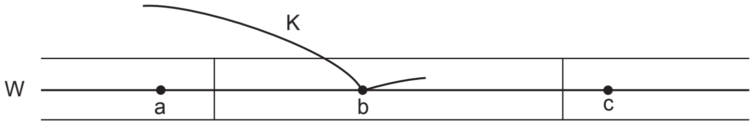
Uwaga przez dowodem. W wyniku sklejenia końców w wiązce $C \times [0, 1]$, polegającym na utożsamieniu punktów $(c, 0)$ i $(h(c), 1)$, odcinki wiązki sklejają się tak, że tworzą linie (rozłączne ze sobą) będące bądź okręgami (jeżeli wychodzi się od punktu c o orbicie skończonej), bądź liniami będącymi obrazami ciągłymi wzajemnie jednoznacznymi prostej. Jeżeli dla punktu x obie orbity są gęste w C, to linia wychodząca z x — oznaczmy ją przez $L(x)$ — jest gęsta w X. Linia $L(x)$ i każdy jej fragment końcowy, jak również początkowy, przecina każdy podzbiór otwarty niepusty kontinuum[239].

Dowód twierdzenia. Przypuśćmy — *a contrario* — że kontinuum $W(C)/h$ zawiera podkontinuum właściwe K o wnętrzu int K niepustym.

Rozważmy punkt x w C, którego orbita $\{x, h(x), h^2(x), ...\}$ jest gęsta w C. Linia $L(x)$ — jako podzbiór gęsty kontinuum $X = C \times [0, 1]/h$ — przecina zarówno int K, jak i dopełnienie $X - K$ kontinuum K. Dokładniej, wychodząc z punktu będącego obrazem punktu $(x, 0)$ — linia $L(x)$ — której każdy fragment końcowy jest gęsty w $C \times [0, 1]/h$ — po przejściu w punkcie a przez $X - K$ wchodzi do int K w punkcie b, aby znaleźć się znowu w $X - K$ w punkcie c. Przechodzi na linie $L(x')$ przechodzące przez punkt x' z dostatecznie małego otoczenia W punktu x. Wiązka przechodząca przez W wycina z K zbiór domknięto-otwarty w K. Mając w tym zbiorze punkt b, kontinuum K leży we wspomnianej wiązce całkowicie, leży więc całkowicie, w jednym z odcinków wiązki. Odcinki wiązki są rzadkie w X. Kontinuum K jest więc rzadkie w X.

[238] Przez h^n jest oznaczona n-ta iterata odwzorowania $h^1 = h$, $h^{k+1} = h \circ h^k$. Dla kompletności przyjmujemy h^0 = identyczność. Przez h^{-l} oznaczone jest n-ta homeomorfizmu h^{-1}.

[239] Wystarczy założyć gęstości tylko jednej z orbit: nieopublikowana praca S. Turka (1986).



Rys. 69. Pasmo od *a* do *c* wiązki przez *W* trafiające podkontinuum K w punkcie b

*

Na zbiorze Cantora jest wiele homeomorfizmów mających orbity gęste. Każdy z nich wyznacza — w myśl opisanej konstrukcji — kontinuum nierozkładalne. Ten rodzaj kontinuów nierozkładalnych będziemy nazywać *solenoidalnymi*.

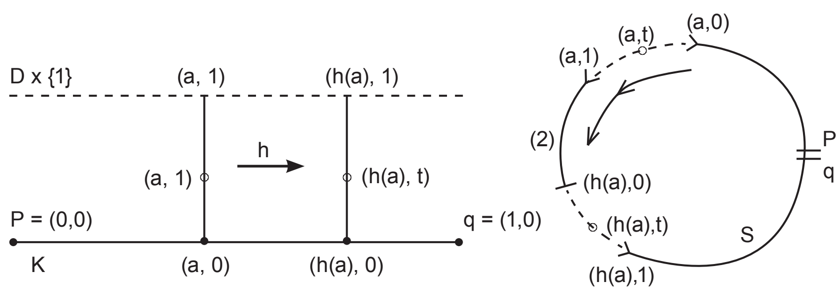
Przykłady

1. Kontinuum nierozkładalne leżące na powierzchni torusa. Niech α będzie ustaloną liczbą niewymierną. Zbiór $D = \{n\alpha \text{ (mod 1)} : n = 0, 1,...\}$ jest gęsty na odcinku [0, 1][240]. Jeśli na zbiorze $C = [0, 1] \times \{0\} \cup D \times \{1\}$ rozważy się uporządkowanie leksykograficzne i topologię tego uporządkowania, to topologicznie dostaniemy zbiór Cantora; por. *Wykład II*, s. 31.

Odwzorowanie *h* polegające na przyprządkowaniu punktowi (x, i) zbioru *C* punktu $((x + \alpha)(\text{mod } 1), i)$ jest — co łatwo widać — poprawnie określone, jest homeomorfizmem *C* na *C* mającym dla każdego swojego punktu, ale orbity gęste. Niech $W(C)/h$ będzie uzyskanym przy określonym wyżej homeomorfizmie *h* kontinuum nierozkładalnym.

Kontinuum to leży na powierzchni torusa.

Zauważmy w tym celu, że zbiór Cantora *C* opisany jest tu podzbiorem odcinka *K*, który dostaje się, jeśli rozważane poprzednio uporządkowanie leksykograficzne rozszerzyć na nadzbiór $(0, 1] \times \{0\} \cup D \times' [0,1]$ zbioru *C*, powstały z *C* przez dostawienie odcinków [0, 1] nad punktami zbioru *D*; geometrycznie polega to na zapełnieniu skoków zbioru *C* przedziałami liczb rzeczywistych; por. *Wykład I*.



Rys. 70. Zapełnienie skoków zbioru C: (1) przed sklejeniem końców, (2) po sklejeniu końców *p* i *q* odcinka *K*

---

240 Twierdzenie pochodzące od Kroneckera (1884) — por. np. G.H. Hardy, E.M. Wright: *An introduction to the theory of numbers*. Oxford 1960, s. 375; tamże uwagi bibliograficzne; por. również uwagi historyczne u K. Petersena: *Ergodic theory*. Cambridge University Press 1983, na s. 156—158.

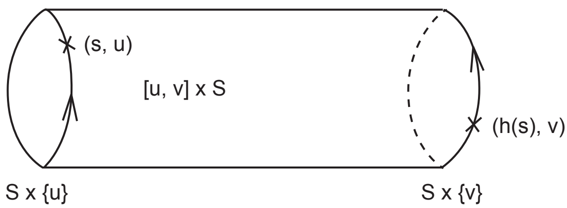
Homeomorfizm h przedłużamy do homeomorfizmu h^* odcinka K przyjmując

$$h^* (a, t) = (h(a), t)$$

dla punktów (a, t) dostawionych odcinków (por. rys. 70).

Homeomorfizm h^* ma na końcach $p = (0, 0)$ i $q = (1, 0)$ odcinka K wspólną wartość $(\alpha, 0)$ Po skojarzeniu końcami p i q odcinka K na otrzymanym okręgu dostajemy homeomorfizm z niezmienniczym na nim zbiorem Cantora, na którym ten homeomorfizm ma wszystkie orbity gęste[241].

Otrzymany okrąg oznaczmy przez S, a przez $g : S \to S$ określony homeomorfizm. Rozważmy walec $S \times [u, v]$. Sklejając brzegi walca tak, by punkt (s, u) sklejał się z punktem $(g(s), v)$, dostajemy powierzchnię torusa, na której leży topologicznie kontinuum nierozkładalne $W(C)/h$. Jest tak, ponieważ zbiór Cantora z dolnego brzegu walca skleja się ze zbiorem Cantora na górnym brzegu tak, że punkty (s, u) sklajają się z punktami $(h(s), v)$ (rys. 71)[242].



Rys. 71. Kontinuum nierozkładalne na torusie

2. Solenoid 2-adyczny. Punkty zbioru Cantora — jeśli widzi się je jako ciągi $\underline{x} = x_0x_1x_2...$, złożone z zer i jedynek — 0 i 1 — można dodawać, zliczając kolejne cyfry mod 2, ale w taki sposób, że jeśli w wyniku dostaniemy 2, to pisząc 0, na następnej pozycji dodatkowo dodajemy 1 (postępowanie znane z dodawania pozycyjnego liczb naturalnych). Elementem neutralnym jest ciąg $\underline{0}$ = 000 ... Łatwo zauważyć, że dodawanie ciągów $x_0x_1...x_k\,000$ ... kończących się zerami jest w odpowiedniości z dodawanie liczb naturalnych $x_0 + 2x_1 + ... + 2^k x_k$ w ich zapisie dwójkowym. Ciąg $\underline{1}$ = 1000 ... odpowiada liczbie 1. Sprawdza się, że dla każdego ciągu $\underline{x}$ istnieje dokładnie jeden ciąg $\underline{y}$ taki, że $\underline{x} + \underline{y} = \underline{0}$, nazywany przeciwnym do $\underline{x}$ i oznaczany przez $-\underline{x}$, zależy w sposób ciągły od $\underline{x}$. W ten sposób zbiór Cantora staje się grupą topologiczną; jej elementy są nazywane *liczbami 2-adycznymi*[243]. Przesunięcia o ustalony element są homeomorfizmami,

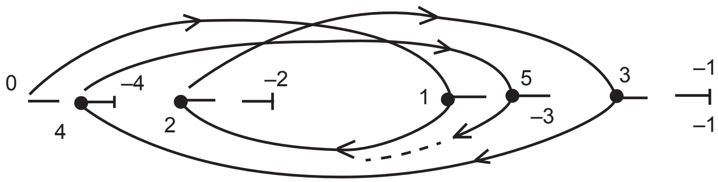
---

[241] Nie byłoby tej osobliwości, jeśliby użyty do konstrukcji homeomorfizm h okręgu był klasy C^2; Denjoy, 1932. Por. uwagi w książce W. Szlenka: *Wstęp do teorii gładkich układów dynamicznych*. Warszawa 1982, s. 65.

[242] Por. W.W. Niemycki, W.W. Stiepanow: *Kaczestwiennaja tieorija differencjalnych urawnienij*. Moskwa—Leningrad 1947, s. 314. Autorzy książki przypisują konstrukcję Poincare'mu. Konstrukcja współczesnymi środkami pochodzi od R.D. Andersona; por. również pracę E. Nunnally'ego: *There is no universal-projecting homeomorphism of the Cantor set*. Coll. Math. **17** (1967), s. 51—52.

[243] G. Bachman: *Introduction to p-adic numbers and valuation*. Academic Press 1964; ujęcie geometryczne: E. Hewitt, K.A. Ross: *Abstract harmonic analysis I*. Springer 1963.

w szczególności przesunięcie o $\underline{1}$, tj. przyporządkowanie $\underline{x} \to \underline{x} + \underline{1}$, jest homeomorfizmem. Orbity tego homeomorfizmu są gęste; w szczególności, orbita punktu $\underline{0}$ składa się z wszystkich punktów postaci $x_0x_1 \ldots x_k$ 000 …, którym na trójkowym zbiorze Cantora odpowiadają lewe końce porcji, których zbiór jest w oczywisty sposób gęsty na zbiorze Cantora, a które są w odpowiedniości z liczbami naturalnymi 1, 2, … (rys. 72). Gęste są również orbity homeorfizmu odwrotnego przesunięcie o – 1.



Rys. 72. Liczby 2-adyczne na zbiorze Cantora

Kontinuum solenoidalne $W(C)/h$ otrzymane za pomocą homeomorfizmu h, będącego przesunięciem zbioru C o jednostkę 2-adyczną $\underline{1}$, jest nazywane *solenoidem 2-adycznym*.

Jest to najdawniej znane kontinuum solenoidalne, mające wiele równoważnych opisów[244]. Spośród innych kontinuów solenoidalnych wyróżnia się tym, że jest grupą topologiczną. Według L. Vietorisa (1927) jest to grupa ilorazowa $(C \times E)/G$, w której C jest zbiorem Cantora z dodawaniem 2-adycznym, E grupą liczb rzeczywistych, a G podgrupą grupy $C \times E$ złożoną z elementów postaci $(m\underline{1}, m)$, gdzie m przebiega liczby całkowite. Jako grupa topologiczna solenoid 2-adyczny jest przestrzenią *jednorodną*, tj. taką, że dla każdej pary jej punktów istnieje homeomorfizm przestrzeni przeprowadzający jeden punkt pary na drugi (w grupie topologicznej punkt a można przeprowadzić na b, przesuwając elementy grupy o $b - a$). Solenoid 2-adyczny nie jest spłaszczalny; więcej: nie leży na żadnej powierzchni[245].

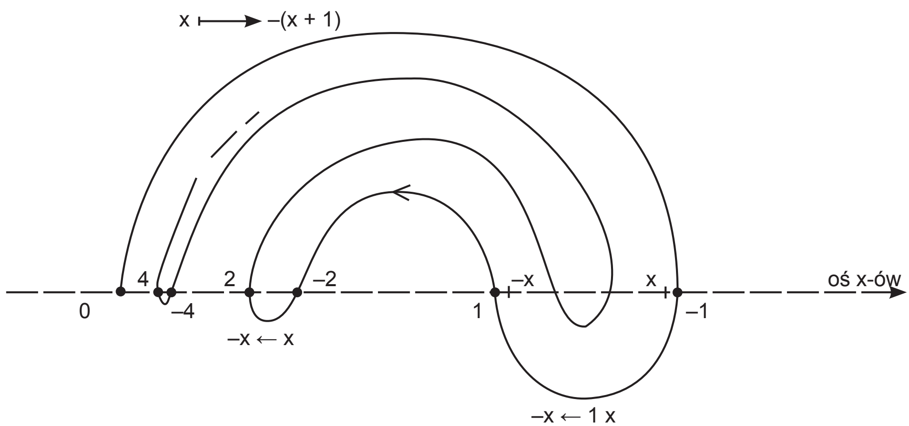
[244] L. Vietoris: *locco cit*., przypis 235, D. van Dantzig: *Über topologish homogene Kontinua*. Fund. Math. 15 (1930), s. 107—25; A. van Heemert: *Topologische Gruppen und unzerlegbare Kontinua*. Comp. Math. 5 (1937), s. 319–326; w książce W.W. Niemyckiego i W.W. Stiepanowa: *Kaczestwiennaja tieorija differencjalnych urawnienij*, na s. 321, można znaleźć pełny analityczny opis solenoidu 2-adycznego położonego w E^3. Autor ma tu okazję zwrócić uwagę na homeomorfizm na discontinuum 2^c mający wszystkie orbity gęste, S. Turek: *Minimal actions on Cantor cubes*. Bull. Pol. Acad. Sci. Math. 51 (2003), s. 129—138, prowadzący do konstrukcji kontinuum, będącego niemetryczną wersją selenoidu.

[245] Dowód niespłaszczalności można znaleźć w pracach M.K. Forta, Jr-a, *Images of plane continus*. Amer. J. Math. 81 (1959), s. 341—346 i R.H. Binga: *A simple closed curve is the only homogenous bounded plane continuum that contains an arc*. Canad. J. Math. 12 (1960), s. 209—230. Dowód niezanurzalności w powierzchnię można znaleźć w pracy T. Maćkowiaka i E.D. Tymchatyna: *Continuous mappings of continua II*. Diss. Math. 125 (1984), na s. 38. Ale na temat niezanurzalności w powierzchnię również wcześniejsze prace: M.C. McCorda: *Embedding of P-like continua in manifolds*. Canad. J. Math 19 (1967), s. 331—332, jak również prace K. Borsuka: *On movable compacta*, Fund. Math 66 (1969), s. 137—146 i J. Krasinkiewicza: *Continuous images of continua and 1-movability*, Fund. Math. 98 (1978), s. 141—164.

Z tej ostatniej uwagi wynika, że solenoid 2-adyczny nie jest homeomorficzny z kontinuum solenoidalnym opisanym w punkcie 1 (które leży na powierzchni torusa).

Jeśli w solenoidzie 2-adycznym utożsamić do punktów pary a i $-a$ elementów przeciwnych, dostaniemy kontinuum Janiszewskiego—Knastera. Nie jest to bezpośrednio widoczne, ale w dużym stopniu uwidacznia to opis tego kontinuum dany przez Knastera.

Trójkowy zbiór Cantora — złożony z ciągów $\underline{x} = x_0x_1...$, $x_j \in \{0, 1\}$ — stytuujemy na odcinku [0, 1] osi x-ów płaszczyzny. Punkty *symetryczne* $\underline{x} = x_0x_1...$ i $\underline{x}' = x'_0x'_1...$, tj. takie, dla których $x'_j = -x_j$ (w sensie działania w grupie $\{0, 1\}$ mod 2) połączmy w półpłaszczyźnie górnej półokręgami, a punkty $\underline{x} = 0 ... 0\ 1\ x_{k+1}x_{k+2} ...$ i $-x = 0 ... 0\ 1\ x'_{k+1}x'_{k+2} ...$ (symbolika ta sama co poprzednio), tj. punkty reprezentujące elementy przeciwne w grupie 2-adycznej, półokręgami w półpłaszczyźnie dolnej (por. rys. 73). Otrzymujemy kontinuum. Widoczny jest homeomorfizm — więcej: to samo położenie na płaszczyźnie — z kontinuum Janiszewskiego—Knastera danym przez opis na s. 67.



Rys. 73. Wersja Knastera kontinuum Janiszewskiego—Knastera

Kompozantą punktu $\underline{0}$ jest "półprosta" łącząca kolejno punkty $\underline{0}$ i $-\underline{1}$ (górą), punkty $-\underline{1}$ i $\underline{1}$ (dołem), punkty $\underline{1}$ i $-\underline{2}$ (górą) i w podobny sposób dalsze, zgodnie z regułą $\underline{x} \rightarrow (\underline{x} + \underline{1}) \rightarrow \underline{x} + \underline{1} \rightarrow (\underline{x} + \underline{2}) \rightarrow \underline{x} + 2 \rightarrow ....$

Ogólnie, kompozantę punktu $\underline{c}$ leżącego na zbiorze Cantora dostaniemy, łącząc kolejno półokręgami (dołem i górą na przemian) punkty $... \rightarrow c \rightarrow (c + \underline{1}) \rightarrow c + 1 \rightarrow -(c + 2) \rightarrow c + 2 \rightarrow ...$

Jeśli $\underline{c}$ nie jest liczbą 2-adyczną całkowitą (a więc nie leży na kompozancie punktu $\underline{0}$), to komponanta tego punktu jest obrazem ciągłym prostej. Te kompozanty są obrazami ciągłymi wzajemnie jednoznacznymi odpowiednich kompozant solenoidu, ale nie są z nimi homeomorficzne. Jak pozakał B e l l a m y[246], niektóre z nich są *ze sobą* homeomorficzne za pomocą pewnych homeomorfizmów całości

[246] D.P. B e l l a m y: *Homeomorphisms of composants*. Houston J. Math. **5** (1979), s. 313—318.

kontinum na siebie. Inne mogą być między sobą homeomorficzne jedynie[247] za pomocą specjalnych homeomorfizmów między samymi kompozantami.

3. Shift i związane z nim kontinuum solenoidalne. Produkt przeliczalnie wielu przestrzeni dyskretnych dwuelementowcyh jest homeomorficzny ze zbiorem Cantora. W szczególności, topologicznie zbiorem Cantora jest produkt $\{0, 1\}^Z$, gdzie Z stanowi zbiór liczb całkowitych, a $\{0, 1\}$ — ustaloną przestrzeń dyskretną o dwu elementach 0 i 1. Elementami produktu $\{0, 1\}$ są *ciągi obustronne*

$$(*) \qquad \ldots x_{-1}x_0x_1x_2\ldots$$

złożone z symboli 0 i 1. Jedną z własności operacji produktowania jest to, że każda permutacja zbioru przestrzeni produktowanych wyznacza na produkcie homeomorfizm. W szczególności przesunięcie o 1 na zbiorze Z, polegające na przyporządkowaniu liczbie m liczby $m + 1$, wyznacza na $\{0, 1\}^Z$ homeomorfizm. Ten homoeomorfizm jest nazywany shiftem[248]. Polega on na przyporządkowaniu ciągowi (*) ciągu powstałego zeń po przesunięciu wstecz o jedno miejsce.

W odróżnieniu od poprzednich przykładów nie wszystkie orbity shiftu są gęste. Wystarczy, aby ciąg (*) był okresowy, żeby orbita zapoczątkowana tym ciągiem była skończona. W szczególności, shift ma dwa punkty stałe: ciąg złożony z samych zer i ciąg złożony z samym jedynek.

Istnieją wszakże obie orbity gęste.

Chcąc to stwierdzić, zacznijmy od uwagi, że zbiór wszystkich ciągów skończonych o wartościach 0 i 1 jest przeliczalny. Ustawmy je wszystkie jeden za drugim, tak by tworzyły jeden ciąg nieskończony i by każdy ciąg skończony powtórzył się w tym ustawieniu nieskończenie wiele razy. Zadbajmy o to, by był to ciąg obustronny (to zawsze można zrobić, dodając do otrzymanego już ciągu jednostronnego jego lustrzane odbicie). Utworzony w ten sposób ciąg obustronny stanowi element produktu $\{0, 1\}^Z$.

Orbita tego elementu jest gęsta w $\{0, 1\}^Z$.

Zbiory ciągów obustronnych mających na ustalonych miejscach ustalone wartości stanowią bazę zbiorów otwartych w $\{0, 1\}^Z$.

Niech $m_1 < m_2 < \ldots < m_k$ będą ustalonymi miejscami, zaś $a_1, a_2, \ldots, a_k$, $a_j = 0$ lub 1 — ustalonymi wartościami (wartość a_j na miejscu m_j). Iterując shift dostatecznie wiele razy, naprowadzimy pomyślany przez nas ciąg obustronny tak, by na miejscach od m_1 do m_k dostać z góry pomyślane wartości, w szczególności wartość a_1 na miejscu m_1, wartość a_2 na miejscu m_2, ..., wartość a_k na miejscu m_k. Stwierdzamy w ten sposób, że orbita pomyślanego przez nas ciągu obustronnego przechodzi przez dany z góry zbiór z bazy zbiorów otwartych w $\{0, 1\}^Z$, co dowodzi gęstości orbity.

---

[247] W. Dębski: *Seminarium z topologii*. Katowice 1993; C. Bandt: *Composants of the horseshoe*. Fund. Math. 144 (1994), s. 231—241.

[248] Angielskie słowo *shift* znaczy *przesunięcie*. Termin przyjął sie w języku polskim nie tylko ze względu na jednosylabowość, lecz także i z uwagi na bliskość brzmieniową z czynnością przesuwania.

Kontinuum solenoidalne dla shiftu różni się topologicznie od poprzednich, zawierając wśród swoich podprzestrzeni okręgi, co wynika z istnienia orbit skończonych dla shiftu, ale istnieje podzbiór niezmienniczy dla shiftu w postaci zbioru Cantora, na którym shift jest homeomorfizmem opisanym w punkcie 1, dającym kontinuum solenoidalne leżące na powierzchni torusa[249].

*

Kontinua łańcuchowe. Tak nazywa się kontinua (metryczne), które dla każdego $\varepsilon > 0$ dają się pokryć skończoną ilością zbiorów otwartych o średnicach $\leqslant \varepsilon$ tworzących łańcuch (w sensie takim jak w *Wykładzie VI*). Innymi słowami: kontinuum (metryczne) X jest nazywane *łańcuchowym*, jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje dlań pokrycie $\mathcal{P} = \{U_0, ..., U_k\}$ zbiorami otwartymi U_j — nazywamy dalej ogniwami — takimi, że

(1) $$U_m \cap U_n \neq \emptyset \Leftrightarrow |m - n| \leqslant 1.$$

Nerw $N(\mathcal{P})$ pokrycia ma postać kompleksu 1-wymiarowego uporządkowanego

$$U_0 < ... < U_k,$$

którego bryłą jest odcinek; w tej symbolice $\{U_0, ..., U_k\}$ są zarówno ogniwami łańcucha jak i wierzchołkami kompleksu.

Niech $g_{\mathcal{P}} : X \to |N(\mathcal{P})|$ będzie odwzorowaniem w nerw pokrycia[250].

Przeciwobraz gwiazdy wierzchołka U_j — tj. sumy dwu przedziałów wokół wierzchołka U_j — jest zwarty w ogniwie U_j (jest to ogólna własność odwzorowań w nerwy pokryć). Odwzorowanie $g_{\mathcal{P}}$ jest zatem ε-odwzorowaniem[251], jeśli ogniwa U_j mają średnice $\leqslant \varepsilon$. Stwierdzamy więc, że:

1. *Kontinua łańcuchowe mają ε-odwzorowania na odcinek dla dowolnie małych ε.*

Kontinua łańcuchowe rozważał w latach trzydziestych Z. Waraszkiewicz[252], określając je przez własność wyrażoną w **1.** Łatwo zobaczyć, że jeśli kontinuum ma dla każdego $\varepsilon > 0$ odwzorowanie ciągłe na odcinek o przeciwobrazach punktów mających średnice $\leqslant \varepsilon$, to jest łańcuchowe. Określenie podane na wstępie pochodzi od R.H. Binga (1951)[253].

Do oczywistych własności należy dziedziczność: *podkontinua kontinuów łańcuchowych są łańcuchowe.*

---

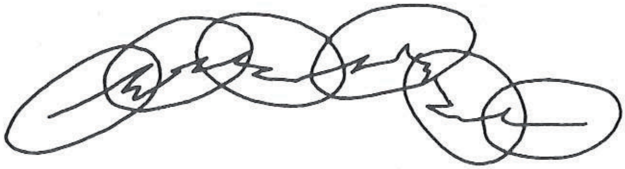
[249] Książka J. de Vriesa: *Elements of topological dynamics*. Kluwer 1996.

[250] Nerw pokrycia i odwzorowanie w nerw pokrycia — w istocie w bryłę nerwu — należą do pojęć topologii mających swój początek w latach dwudziestych. Metoda jest omówiona np. w książce autora *Wykłady z topologii*, *Topologia przestrzeni euklidesowych*, s. 115.

[251] Przez *ε-odwzorowanie* rozumiemy odwzorowanie, dla którego przeciwobrazy punktów mają średnice $\leqslant \varepsilon$.

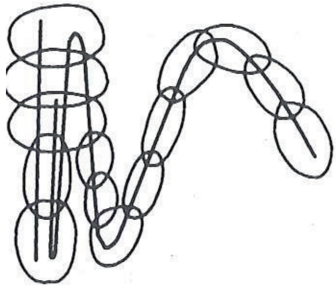
[252] Z. Waraszkiewicz: *O pokrewieństwie kontynuów*. Wiad. Mat. **43** (1936), s. 1—57.

[253] R.H. Bing: *Snake-like continua*. Duke Math. J. **18** (1951), s. 653—663. Kontinua wężowe lub taśmowe u Waraszkiewicza są innymi używanymi terminami dla kontinuów łańcuchowych.

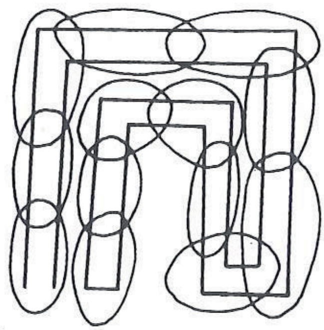


Rys. 74. Kontinuum łańcuchowe

Najprostszym kontinuum (wielopunktowym) łańcuchowym jest odcinek. Innymi kontinuami są: sinusoida zagęszczona i kontinuum nierozkładalne Janiszewskiego—Knastera. Kontinua te są zamknięte we wstęgach szerokości $\leqslant \varepsilon$, które można dzielić na segmenty o średnicy $\leqslant \varepsilon$, a te z kolei poszerzyć do zbiorów otwartych tworzących łańcuchy, co ilustrują rys. 75 i 76.



Rys. 75. Łańcuch dla sinusoidy zagęszczonej



Rys. 76. Łańcuch dla kontinuum Janiszewskiego—Knastera

*

Przypomnijmy, że przez kontinuum *jednosprzęgłe* rozumie się kontinuum nie mające przedstawienia w postaci sumy $A \cup B$ dwu kontinuów o przekroju $A \cap B$ niespójnym.

Odcinek stanowi kontinuum jednosprzęgłe. Jednosprzęgłe są kontinua nierozkładalne (warunek jednosprzęgłości jest spełniony w próżni).

Nie jest jednosprzęgły okrąg, będąc sumą dwu półokręgów.

Odcinki $[a, b] = \{n : a \leqslant n \leqslant b\}$ liczb naturalnych są jednosprzęgłe w *sensie kombinatorycznym*: przekrój dwu odcinków jest odcinkiem, chyba że jest zbiorem pustym.

Z określenia łańcuchów wzorem (1) widać, że można je traktować jako odcinki liczb naturalnych; są zatem jednosprzęgłe w sensie kombinatorycznym.

2. *Kontinua łańcuchowe są jednosprzęgłe.*

Dowód. Niech X będzie kontinuum łańcuchowym. Jeśliby nie było jednosprzęgłe, to dla dostatecznie małego ε łańcuch o ogniwach mających średnice $\leqslant \varepsilon$, pokrywający X, dałby się przedstawić w postaci sumy $K \cup L$ łańcuchów o przekroju kobinatorycznie niespójnym — co jest niemożliwe.

Wobec dziedziczenia się łańcuchowości na podkontinua wnioskujemy, że

2′. *Kontinua łańcuchowe są dziedzicznie jednosprzęgłe,* co znaczy, że *każde podkontinuum kontinuum łańcuchowego jest jednosprzęgłe*.

Z twierdzenia 2 wynika, że okrąg nie jest kontinuum łańcuchowym, bo nie jest jednosprzęgły. Nie są kontinuami łańcuchowymi — wobec 2′ — kontinua zawierające topologicznie okręgi.

*

Nazwijmy *quasi-triodą* kontinuum będące sumą $A \cup B \cup C$ trzech kontinuów, z których żadne nie jest zawarte w sumie dwu pozostałych: $A \not\subset B \cup C$ itd. Przykładami są okrąg i triod — graf w kształcie litery *T*.

3. *Kontinua łańcuchowe nie są quasi-triodami.*

Dowód. Niech X będzie kontinuum łańcuchowym. Jeśli byłby quasi-triodą, to — biorąc pod uwagę przedstawienie kontinuum X w postaci sumy $A \cup B \cup C$ konitinuów o własnościach opisujących triodyczność — dla dostatecznie małego ε łańcuch pokrywający X miałby przedstawienie w postaci triody kombinatorycznej, tj. sumy $K \cup L \cup M$ łańcuchów o przekroju niepustym, z których żaden nie jest zawarty w sumie pozostałych, co dla łańcuchów — odcinków liczb naturalnych — jest niemożliwe.

Kontinuum spełniające warunki dla quasi-triody z $A \cap B \cap C \neq \emptyset$ będziemy nazywać *triodą*[254]. Triodą jest graf w kształcie litery T. Okrąg nie jest triodą i nie zawiera żadnej triody. Kontinuum nie zawierające triodów nazywane jest atriodycznym.

Z twierdzenia 3 wynika, że kontinua łańcuchowe nie są triodami, co wobec dziedziczenia się łańcuchowości na podkontinua prowadzi do wniosku, że *kontinua łańcuchowe są atriodyczne*.

*

Atriodyczność sama nie implikuje łańcuchowości — przykładem jest okrąg. Podobnie nie implikuje łańcuchowości sama dziedziczna jednosprzęgłość — przykładem jest triod. Również obie te własności razem wzięte nie implikują łańcuchowości.

Jako najprostszy przykład można podać solenoid 2-adyczny stanowiący kontinuum nierozkładalne, którego podkontinuami właściwymi wielopunktowymi są łuki. Solenoid jest więc zarówno dziedzicznie jednosprzęgły, jak i atriodyczny. Nie jest kontinuum łańcuchowym wobec swojej niespłaszczalności.

Znane są przykłady kontinuów płaskich dziedzicznie jednosprzęgłych atriodycznych nie łańcuchowych (Ingram 1972)[255].

---

[254] Jeśli żądać więcej, a mianowicie, by $A \cap B \cap C$ było kontinuum, i żeby $A \cap B = B \cap C = C \cap A = A \cap B \cap C$, jedyną triodą wśród grafów pozostanie triod.

[255] W.T. Ingram: *An atriodic tree-like continuum with positive span*. Fund. Math. 77 (1972),

Bing dowiódł, że w zakresie kontinuów nie zawierających podkontinuów nierozkładalnych wielopunktowych, tj. w zakresie kontinuów *dziedzicznie rozkładalnych*, atriodyczność i dziedziczna jednosprzęgłość razem implikują łańcuchowość[256]. Stąd, w przykładach Ingrama musi się pojawić nierozkładalność.

Kontinua łańcuchowe są nieprzywiedlne między pewnymi dwoma punktami. Wynika to z ogólniejszego twierdzenia Sorgenfreya (1946)[257], orzekającego, że kontinua metryczne nie będące *quasi*-triodami mają już tę własność. Stąd kontinua łańcuchowe są łukami, jeśli są lokalnie spójne.

*

4. *Odwzorowania ciągłe kontinuum łańcuchowego na okrąg są nieistotne*[258].

Dowód. Niech $f : X \to S^1$ będzie odwzorowaniem ciągłym kontinuum łańcuchowego na okrąg. Dla podziału symplicjalnego okręgu S^1 (o co najmniej trzech wierzchołkach) rozważmy pokrycie kontinuum X zbiorami f^{-1} (gw a), gdzie a przebiega wierzchołki podziału. Niech $g : X \to [0, 1]$ będzie odwzorowaniem ciągłym na odcinek z podziałem symplicjalnym na tyle drobnym, by pokrycie przeciwobrazami g^{-1} (gw b) gwiazd wierzchołków tego podziału było wpisane w pokrycie zbiorami f^{-1} (gw a). Dla każdego b wybierzmy $\alpha(b)$ takie, że

$$g^{-1}\,(\text{gw } b) \subset f^{-1}\,(\text{gw } (a(b))).$$

Weźmy pod uwagę odwzorowaniem symplicjalne $h : [0, 1] \to S^1$ (dla rozważanych na odcinku i okręgu podziałów) wyznaczone przez przyporządkowanie $b \to \alpha(b)$.

Odwzorowania $h \circ g$ i f są homotopijne, co wynika stąd, że dla każdego x punkty $h(g(x))$ i $f(x)$ leżą w gwieździe tego samego wierzchołka podziału S^1.

Ponieważ odwzorowanie h — jako odwzorowanie z odcinka — jest homotopijne ze stałą, więc $h \circ g$ jest homotopijne ze stałą, a w rezultacie również odwzorowanie f.

Wniosek. *Kontinua łańcuchowe nie rozcinają płaszczyzny*[259].

---

s. 99—107; *An uncountable collection of mutually exclusive planar atriodic tree-like continua with positive span*. Fund. Math. 85 (1974), s. 73—78. Omówienie tych wyników można znaleźć w książce W.T. Ingrama: *Inverse limits*. Sociedad Math. Mexicana 2000.

[256] R.H. Bing: *Snakie-like continua*. Na temat kontinuów łańcuchowych por. artykuł przeglądowy J.B. Fugate'a: *Chainable continua*. Topology Seminar Wisconsin 1965, s. 120—133; Annals of Math. Studies **60**, Princeton University Press 1966.

[257] R.H. Sorgenfrey: *Concerning continua irreducible about n-points*. Amer J. Math 68 (1946), s. 667. Por. również wcześniejszą pracę tego autora, *Concerning triodic continua*. Amer. J. Math. **68** (1944), s. 439—460; T. Maćkowiak, E.D. Tymchatyn: *Continuous mappings on continua II*. Dissert. Math **225** (1984), s. 24, z uzupełnieniem T. Maćkowiaka: *Sets of irreducibility of mappings*. Bull. Acad. Pol.-Soc. **24** (1976), s. 335—339 (Theorem 3); D.P. Kuykendall: *Irreducibility and indecompasability of continua*. Fund. Math. **80** (1973), s. 235—270.

[258] *Nieistotne* znaczy: homotopijne z odwzorowaniem constans.

[259] Według twierdzenia Borsuka zbiór zawarty nie rozcina E^n, jeśli odwzorowania tego zbioru w S^{n-1} są wszystkie nieistotne; twierdzenie można znaleźć w książce autora, *Wykłady z topologii, Topologia przestrzeni euklidesowych*, s. 142.

Wniosek nabiera treści, jeśli się wie, że kontinua łańcuchowe są spłaszczalne[260].

Pokażemy, że:

2. *Kontinua łańcuchowe mają własność punktu stałego* (Hamilton, 1951; Rosen, 1959)[261].

Dowód. Niech f : X X będzie odwzorowaniem ciągłym kontinuum łańcuchowego w siebie. Ustalmy ε > 0 i odwzorowanie g : X → [0, 1]. Rozważmy zbiory

$$A = \{x : g(x) \leqslant g(f(x))\} \qquad \text{i} \qquad B = \{x : g(f(x)) \leqslant g(x)\}$$

domknięte — wobec ciągłości g i f — niepuste i pokrywające X. Wobec niespójności X zbiory A i B mają punkt wspólny, znaczy to, że istnieje x takie, że x i $f(x)$ leżą w przeciwobrazie $g^{-1}(a)$ jednego i tego samego punktu a. Jest więc $d(x, f(x)) \leqslant \varepsilon$, co wystarcza — wobec zwartości X i wobec tego, że tego rodzaju punkt x_ε można znaleźć dla każdego $\varepsilon > 0$ — aby stwierdzić istnienie punktu stałego dla f.

Wzorce opisujące kontinua łańcuchowe

Niech X będzie konitnuum łańcuchowym. Niech α będzie łańcuchem pokrywającym X. Dla każdego $\delta > 0$ istnieje łańcuch wpisany w α *właściwie*[262], o elementach mających średnice $\leqslant \delta'$ i pokrywających X.

Dowód w istocie był przeprowadzony w *Wykladzie 5* (wystarczy wziąć liczbę Lebesgue'a δ', $\delta' \leqslant \delta$ dla łańcucha α i wziąć pod uwagę łańcuch o średnicach ogniw $\leqslant \delta'$ istniejący na mocy łańcuchowości X).

Z tej uwagi wynika, że mając kontinuum łańcuchowe X, można dla każdego ciągu liczb dodatnich tworzących ciąg malejący

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \ldots$$

dążący do 0, zbudować łańcuchy $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ takie, że ogniwa łańcucha α_n mają średnice ε_n i takie, że dla każdego n łańcuch α_{n+1} jest wpisany właściwie w łańcuch α_n.

Ten opis można przedstawić bardziej formalnie.

---

[260] R.H. Bing: *Snake-like continua*, *loco cit.*, s. 154. Idea dowodu nie jest trudna, ale ze względu na wymaganą przy konstrukcji odpowiedniego zanurzenia szczegółowość dowód opuszczamy. Dowód — przy ujęciu łańcuchowości poprzez ε-odwzorowania — podał Z. Waraszkiewicz: *O pokrewieństwie kontynuów*, *loco cit.*, s. 151. Ujęcie poprzez granice wsteczne pozwala na jeszcze inny dowód; por. J. Mioduszewski: *Functional conception of snake-like continua*. Fund. Math. **51** (1962), s. 178—189, przypis na s. 179.

[261] O.H. Hamilton: *A fixed point theorem for pseudo-arcs and certain other metric continua*. Proc. Amer. Math. Soc. **2** (1951), s. 173—174; R.H. Rosen: *Fixed points for multivalued functions on snake-like continua*. Proc. Amer. Math. Soc. 10 (1959), s. 167—173. Patrz także O.W. Łokuciewski: *Odna tieoriema o niepodwiżnoj toczkie*. Uspiechi mat. nauk 12. wyp. 3 (75) (1957), s. 171—172. Twierdzenie znał Z. Waraszkiewicz (1935); Protokoły Seminarium Topologicznego, Warszawa.

[262] Rodzina zbiorów jest wpisana *właściwie* w rodzinę zbiorów $\mathfrak{R}$, jeśli rodzina złożona z domknięć jej elementów jest wpisana w $\mathfrak{R}$.

Łańcuchy traktujemy jako ciągi uporządkowane ogniw, co sprowadza się do traktowania łańcuchów jako odcinków liczb naturalnych, można przyjąć, że początkowych, tj. odcinków postaci

$$m = \{0, 1, \dots m - 1\}.$$

Przy tej konwencji zapisu odcinek liczb naturalnych utożsamiamy z liczbą naturalną — długością odcinka.

Jeżeli łańcuch n wpisany jest w łańcuch m, to $n \geqslant m$. Niech

$$f : n \to m$$

będzie funkcją realizującą to wpisywanie: $f(j)$ jest numerem ogniwa łańcucha m zawierającego ogniwo o numerze j łańcucha n. Funkcja f jest *ciągła* w tym znaczeniu, że

$$|f(j+1) - f(j)| \leqslant 1 \qquad \text{dla każdego } j.$$

Ciąg łańcuchów, wpisanych jeden w drugi ze średnicami ogniw malejącymi do zera, wyznacza ciąg

(*) $$n_1 \xleftarrow{f_1} n_2 \xleftarrow{f_2} n_3 \leftarrow \dots$$

odwzorowań ciągłych.

Ciągi (*) nazwijmy wzorcami konitnuów łańcuchowych.

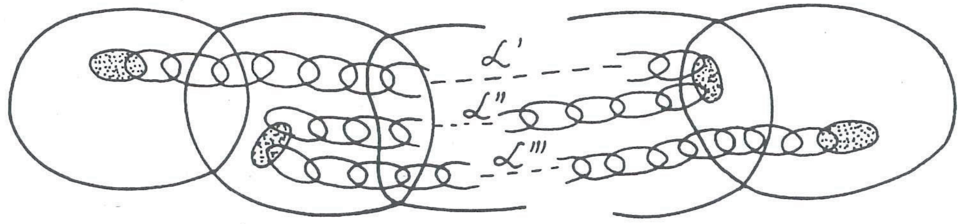
1. *Kontinuum mające wzorzec złożony z funkcji monotonicznych jest łukiem*.

Dowiedliśmy tego w *Wykładzie V* przy okazji dowodu twierdzenie Mazurkiweicza—Moore'a, gdzie dopuszczono pewne odstępstwo monotoniczności (oscylacja w obrębie 4 ogniw). Dla uzyskania tezy wykorzystaliśmy twierdzenie Moore'a charakteryzujące łuki jako kontinua mające dokładnie dwa punkty nierozspajające.

Wzorce dla kontinuów nierozkładalnych

Elementami tych wzorców są funkcje *o pełnych oscylacjach*. Opiszemy najbardziej typowy przykład wzorca.

Mówimy, że łańcuch $\mathcal{L}$ jest wpisany w łańcuch $\mathcal{K}$ z *potrójną pełną oscylacją*, jeśli $\mathcal{L}$ jest sumą trzech łańcuchów $\mathcal{L}'$, $\mathcal{L}''$ i $\mathcal{L}'''$ stykających się jedynie pojedynczymi ogniwami, $\mathcal{L}'$ z $\mathcal{L}''$ i $\mathcal{L}''$ z $\mathcal{L}'''$. Łańcuch $\mathcal{L}'$ biegnie od pierwszego do przedostatniego ogniwa łańcucha $\mathcal{K}$, łańcuch $\mathcal{L}''$ biegnie od przedostatniego do drugiego ogniwa łańcucha $\mathcal{K}$, a łańcuch $\mathcal{L}'''$ — od drugiego ogniwa do ostatniego ogniwa w K, co ilustruje rys. 77 (przebiegi łańcuchów $\mathcal{L}'$, $\mathcal{L}''$ i $\mathcal{L}'''$ nie muszą być monotoniczne).



Rys. 77. Łańcuch wpisany z pełną oscylacją

Niech $n_1 \xleftarrow{f_1} n_2 \xleftarrow{f_2} n_3 \leftarrow ...$ będzie wzorem złożonym z funkcji o pełnej potrójnej oscylacji. Kontinuum łańcuchowe wyznaczone przez ten wzorzec jest nierozkładalne.

Istotnie, niech X będzie tego rodzaju kontinuum i niech Y będzie podkontinuum właściwym kontinuum X. Wobec $X - Y \neq \emptyset$ istnieje n_* takie, że jeśli $n \geqslant n_*$, to pewne ogniwo łańcucha $\mathcal{L}_n$ (dla kontinuum X) nie przecina Y, przy czym to ogniwo nie jest ani pierwszym, ani ostatnim ogniwem i łańcuch $\mathcal{L}_{n+2}$ w każdym z odcinków $\mathcal{L}_n^{(1)}$ i $\mathcal{L}_n^{(2)}$ powstałych z $\mathcal{L}_n$ przez odrzucenie wspomnianego ogniwa rozbija się na "równolegle biegnące" łańcuchy w ilości co najmniej dwóch. Kontinuum Y leży w jednym z tych "równoległych" do siebie części łańcuchów $\mathcal{L}_{n+2}$. Każdy punkt kontinuum Y ma więc w odległości $\leqslant \varepsilon_{n+2}$ punkty może być dowolnie małe, Y jest rzadkie w X.

Dowiedliśmy nierozkładalności kontinuum X.

Uważając pojęcie funkcji o pełnej k-krotnej oscylacji za zrozumiałe (opuszczamy szczegółowy opis), zgodzimy się również na tę konkluzję, jeśli wzorzec składa się z funkcji o pełnych oscylacjach $k \geqslant 2$; krotność k nie musi być ta sama dla wszystkich funkcji. Przypadek $k = 2$ (stale) jest wzorcem dla kontinuum Knastera—Janiszewskiego.

*

Kontinuum jest nazywane *dziedzicznie nierozkładalnym*, jeśli każde jego podkontinuum wielopunktowe jest nierozkładalne. Już samo istnienie kontinuów dziedzicznie nierozkładalnych stanowi problem. Pierwsza konstrukcja kontinuum pochodziła od Knastera[263]. Później Mazurkiewicz podał nieefektywny dowód istnienia, pokazując, że wśród kontinuów leżących na płaszczyźnie stanowią one większość w sensie kategorii Baire'a[264].

---

[263] B. Knaster: *Un continu dont tout sous-continuum est indécomposable*. Fund. Math. **3** (1922), s. 247—286.

[264] S. Mazurkiewicz: *Sur les continus absolument indécomposables*. Fund. Math. **16** (1930), 151—159.

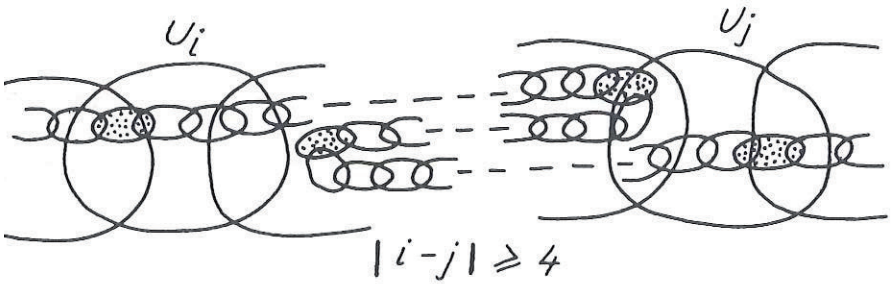
Wzorzec dla kontinuum dziedzicznie nierozkładalnego

Od wpisywań będziemy teraz wymagać, by były *wszędzie oscylujące* w tym sensie, że dla każdych dwu ogniw U_i i U_j łańcucha $\mathcal{K}$, różniących się w numeracji co najmniej o 4, $|i-j| \geqslant 4$. łańcuch $\mathcal{L}$ wpisany w K, jeśli przechodzi od U_i do U_j pełną potrójną oscylację.

Kontinuum łańcuchowe mające wzorzec złożony z funkcji wszędzie oscylujących jest dziedzicznie nierozkładalne.

Dowód. Niech X będzie kontinuum łańcuchowym o wzorcu złożonym z funkcji wszędzie oscylujących. Niech Y będzie podkontinuum wielopunktowym kontinuum X. Niech L_1, L_2, ... będzie ciągiem łańcuchów opisującym kontinuum X. Niech L'_k, który składa się z ogniw łańcucha L_k przecinających kontinuum Y.

W przypadku dostatecznie dużych k łańcuch L'_k ma co najmniej 4 ogniwa (bo Y jest wielopunktowe), a dla n > k łańcuch L'_n ma pełną potrójną oscylację między pierwszym i ostatnim ogniwem łańcucha L'_k (wpisywanie L_n w L_k jest wszędzie oscylujące). Dlatego kontinuum Y jest — na mocy poprzedniego twierdzenia — nierozkładalne. Dowodzi to dziedzicznej nierozkładalności kontinuum X.



Rys. 78. Wpisywanie wszędzie oscylujące

Podany uprzednio opis kontinuum łańcuchowego dziedzicznie nierozkładalnego nie zawiera dowodu możliwości wpisania w dany łańcuch łańcucha wszędzie oscylującego. Chociaż opis ten był *implicite* obecny już w pracy Knastera (1922), to dowód istnienia wpisywań wszędzie oscylujących podał R.H. Bing; por. również pracę autora[265]. Kontinuum łańcuchowe zbudowane przez Binga — z wpisywaniami tu opisanymi — jest homeomorficzne z kontinuum zbudowanym przez Knastera. Nieco wcześniej E.E. Moise[266] zbudował kontinuum dziedzicznie nierozkładalne, którego wszystkie podkontinua wielopunktowe są ze sobą homeomor-

[265] R.H. Bing: *A homogenous indecomposable plane continuum*. Duke Math. J. 15 (1948), s. 729—742; J. Mioduszewski: *Functional conception of snake-like continua*. Fund. Math. 51 (1962), s. 178—189; *Everywhere oscillating functions and homogeneity of the psudoarc*. Fund. Math. 56 (1964), s. 131—155; wersja kombinatoryczna: *Everywhere oscillating functions*, Empire of Mathematics, 2001.

[266] E.E. Moise: *An indecomposable continuum which is homeomorphic to each of its nondegenerate subcontinua*. Trans. Amer. Math. Soc. **63** (1948), s. 581—594.

ficzne i ze względu na tę własność nazwane *pseudołukiem*. Kontinuum Moise'a jest również łańcuchowe i jest homeomorficzne z kontinuum Binga, co wynika z ogólniejszego twierdzenia, według którego kontinua łańcuchowe dziedzicznie nierozkładalne są wszystkie ze sobą homeomorficzne[267].

*

Konstrukcja kontinuum nieprzywiedlnego Knastera—Janiszewskiego była przeprowadzona w sposób geometryczny bez użycia opisu łańcuchowego. Nie podawaliśmy wzorca dla sinusoidy zagęszczonej, ale nie jest on trudny do opisania i zrealizowania na płaszczyźnie.

Istnieją kontinua dziedzicznie nierozkładalne T_2 niemetryczne. Konstrukcję podał A. Emeryk[268].

---

[267] R.H. Bing: *Concerning hereditarily indecomposable continua*. Pacific J. Math. **1** (1951), s. 43—51.

[268] A. Emeryk: *A hereditarily indecomposable non-metric Hausdorff continuum*. Fund. Math. **92** (1976), s. 63—64, oraz wcześniejsza praca tego samego autora, *An atomic map onto an arbitrary metric continuum*, Fund. Math. **77** (1972), s. 145—149, gdzie była opisana pewna ogólna metoda konstrukcji kontinuów niemetrycznych. Inne konstrukcje podali K.P. Hart, J. van Mill i R. Pol: *Remarks on hereditarily indecomposable continua*. Topology Proceedings 25 (2000), s. 179—206.

Indeks nazwisk

Skorowidz nazw

Twierdzenia

Przykłady

Jerzy Mioduszewski

LECTURES ON TOPOLOGY
Connected spaces and continua

Summary

The book consists of eight lectures concerning the theory of connectedness and continua to be used as Univeristy text. In the part of the book devoted to continua such topics as Moore theorem concerning cut points, Hahn—Mazurkiewicz, Mazurkiewicz—Moore and Sierpiński theorems concerning locally connected metric continua, theorems on indecomposable continua including Mazurkiewicz theorem on the number of composants are treated. The constructions of some solenoidal continua are given. A lecture is devoted to the non-metric branch of the theory of continua with theorems by Kurepa, Mardešić, Papić and Treybig. There is a special lecture devoted to Peano maps. Some peculiarities among non-compat connected sets are discussed, in particular those which concern biconnected sets. The next is aimed at students at various levels. Some parts are written for more advanced readers.

Ежи Медушевскии

ЛЕКЦИИ ПО ТОПОЛОГИИ
Связные пространства и континуумы

Резюме

Книга составлена из восьми лекции мыслимых как очерк теории связных пространств и теории континуумов начиная с элементарных понятий входящих в курс теоретико-множествнной топологии по некоторые новейшие конструкции и теоремы. Вслед за элементарном введением идут лекции посвященные случаям и особенностям двусвязных пространств в смысле Кнастера—Куратовского. Что касается теории континуумов, книга содержит теоремы Мура о точках разбивающих континуумы, теоремы Мана—Мзауркевича, Мзауркевича—Мура и Серпинского о локально связных континуумах, очерк теории неразложимых континуумов, включая теоремы Мзауркевича о числе композантов. Выделено ответвление дла неметрических континуумов, где изложены теоремы Курепы, Мардешича, Папиуа и Треибига. Отдельная лекция посвященная отображениям Пеано. Книгу кончает лекция посвященна дендритом — метрическим и неметрическим. Книга предназначена студентом математики изучающим стандартный курс теоретико-множествнной топологии, но те которых интересуют тоже специальные главы этой дисциплины, могут найти в книге нечто для себя.

ISSN 0208-6336
ISBN 978-83-226-1963-6

Wydawca
Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego
ul. Bankowa 12B, 40-007 Katowice
www.wydawnictwo.us.edu.pl
e-mail: wydawus@ud.edu.pl

Wydanie II. Ark. druk. 10,75. Ark. wyd. 13,5. Papier offset. kl. III, 90 g Cena 16 zł

Łamanie: Pracownia Składu Komputerowego
Wydawnictwa Uniwersytetu Śląskiego
Druk i oprawa: PPHU TOTEM s.c.
M. Rejnowski, J. Zamiara
ul. Jacewska 89, 88-100 Inowrocław

Cena 16 zł (+ VAT)

ISSN 0208-6336
ISBN 978-83-226-1963-6